

디랙 방정식의 성질과 풀이법에 관하여

양성덕

2021년 9월 7일

차 례

차 례	1
1 이 글의 목적	1
2 물리학에서 말하는 스핀이란?	2
3 기호 설명	2
4 디랙 스피너의 스핀 성질	3
5 수소 원자에 있는 전자의 디랙 방정식 푸는 법	6
참고 문헌	13

1 이 글의 목적

미분기하학에서 다루는 대상 중에 스피너(spinor)라는 것이 있다. 스피너는 1913년에 수학자 Elie Cartan이 최초로 발견한 매우 재미있는 수학적 존재인데 그 추상성으로 인하여 이해하기 쉽지 않다. 다행히 스핀 구조는 1927년에 발견된 파울리 방정식, 1928년에 발견된 디랙 방정식을 통하여 실제 입자의 기본 성질 중 하나임이 밝혀졌는데, 디랙 방정식에 관한 내용은 비교적 이해가 간단하면서도 스핀 구조를 잘 설명해 주는 바가 있어 수학도들도 스핀 구조를 이해함에 있어서 한번쯤은 디랙방정식을 자세히 분석해 보는 것이 좋을 것으로 생각된다.

그런데 디랙 방정식에 대한 설명은 대부분 물리학의 입장에서 기술되어 있어서 수학도들이 쉽게 따라가기 어려운 부분이 있다. 그래서 학부 미적분학과 선형대수, 복소해석학 1, 미분 방정식 정도만 알면 이해할 수 있지 않을까 하는 수준에서 디랙방정식에서 어떻게 스핀이 유도되는가, 디랙방정식을 어떻게 푸는가를 정리해 보았다.

2 물리학에서 말하는 스핀이란?

다음은 물리 관점에서 스핀이 무엇인가를 설명한 매우 흥미로운 동영상이다.

- <https://www.youtube.com/watch?v=pWlk1gLf2Y>
- 1) 6분 25초부터 – Stern -Gerlach 실험
- 2) 8분 50초부터 – 스핀 성질

3 기호 설명

디랙 방정식은 4차원 로렌츠 공간 $\mathbb{L}^4$ 에 정의되어 있으며 복소값을 가지는 네 함수에 대한 미분방정식이다.

보통 시간 좌표는 t , 공간 좌표는 x, y, z 로 나타내는데 기호의 편의상 이를 각각 x_0, x_1, x_2, x_3 로 나타내기도 한다. 로렌츠 공간의 한 점을 (t, x, y, z) 로 나타내기도 하고 (x_0, x_1, x_2, x_3) 로 나타내기도 하는데 다음과 같이 2×2 에르미트 행렬로 나타내기도 한다.

$$p = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_\mu \sigma_\mu.$$

여기서

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 는 파울리 행렬이다. 이렇게 나타냈을 때 가장 편리한 점은 다음과 같다.

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \det \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}.$$

그러므로 임의의 $A \in SL(2, \mathbb{C})$ 에 대하여 다음은 $\mathbb{L}^4$ 의 등장사상이 된다.

$$A : \mathbb{L}^4 \rightarrow \mathbb{L}^4, \quad X \mapsto AXA^*. \quad (2)$$

A 가 특별히 $SU(2)$ 의 원소면 $A^* = A^{-1}$ 이므로

$$t' = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AXA^*) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AXA^{-1}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X) = t.$$

즉, 시간성분이 변하지 않는다. 사실은 시간축은 고정하고 세 공간좌표만 변화시키는 등장사상이 되며 사실 향을 보존하는 것도 보일 수 있어 $\mathbb{R}^3$ 의 회전이 됨을 알 수 있다. 즉 $SO(3)$ 의 원소가 된다. $-A$ 의 액션은 A 의 액션과 같으므로 최소 2개가 한 회전을 주는데 이제 2-1 뒤편개가 된다.

4 디랙 스피너의 스핀 성질

디랙 방정식은 다음과 같다.¹

$$\left(\frac{i}{c}\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3\right)\Psi = -\frac{mc}{\hbar}\Psi. \quad (3)$$

단, 여기서 m 은 질량, c 는 빛의 속도, e 는 전하, $\hbar$ 는 플랑크 상수고 γ_μ 는 다음 관계를 만족시키는 4×4 행렬이며 Ψ 는 4×1 행렬이다.

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 0_4, \quad \gamma_\mu^2 = I_4, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \mu \neq \nu. \quad (4)$$

즉 식 (3)은 미분방정식 4개로 이루어져 있다.

첨언 1.

$$\left(\frac{i}{c}\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3\right)^2\Psi = \left(-\frac{\partial_0^2}{c^2} + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2\right)\Psi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi. \quad (5)$$

이런 관계식을 만족시키는 행렬 중에 다음을 ‘선택’하자.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

이는 식 (4)를 만족시킨다. 이제 $\Psi := \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix}$ 라 하면 다음이 성립한다. 여기서

¹[7, 식 (18)]을 약간 변형한다. $A_0 = A_j = 0$ 으로 한 후 식 전체에 α_4 를 곱하고, $\hbar := 2\pi\hbar$, $\gamma_0 := \alpha_4$, $\gamma_j := -\alpha_4\alpha_j$ 로 놓는다. 단 $j = 1, 2, 3$.

Ψ_R 과 Ψ_L 은 모두 2×1 행렬 함수다. 이를 이용하면 식 (3)은 다음과 같다.

$$+\frac{i}{c}\partial_0\Psi_R+i\sum_{j=1}^3\sigma_j\partial_j\Psi_L=-\frac{mc}{\hbar}\Psi_R, \quad (7)$$

$$-\frac{i}{c}\partial_0\Psi_L-i\sum_{j=1}^3\sigma_j\partial_j\Psi_R=-\frac{mc}{\hbar}\Psi_L. \quad (8)$$

이를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix} \Psi_L = -\frac{1}{c}\partial_0\Psi_R + \frac{imc}{\hbar}\Psi_R, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix} \Psi_R = -\frac{1}{c}\partial_0\Psi_L - \frac{imc}{\hbar}\Psi_L. \quad (10)$$

자, 이제 좌표를 바꾸면 방정식이 어떻게 변하는지 살펴보자. 아무렇게나 좌표를 바꾸는 건 아니고 의미가 있게 바꾸어야 한다. 그럴려면 (2)와 같이 바꾸는 걸 생각한다. 이 작용이 $\mathbb{L}^4$ 의 등장사상이기 때문이다. 그래서 $SL(2, \mathbb{C})$ 의 행렬 A 를 사용하여 다음과 같이 좌표를 변환하자.

$$\begin{pmatrix} x'_0 + x'_3 & x'_1 - ix'_2 \\ x'_1 + ix'_2 & x'_0 - x'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} A^*. \quad (11)$$

그러면 다음이 성립한다.

$$\begin{pmatrix} \partial'_0 + \partial'_3 & \partial'_1 - i\partial'_2 \\ \partial'_1 + i\partial'_2 & \partial'_0 - \partial'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix} A^*. \quad (12)$$

이 때 $AA^* = I_2$ 라고 하면, 즉 A 가 $SU(2)$ 의 원소라고 하면

$$\begin{pmatrix} \partial'_3 & \partial'_1 - i\partial'_2 \\ \partial'_1 + i\partial'_2 & -\partial'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix} A^*.$$

그러므로 식 (10)은 다음과 같다.

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \partial'_3 & \partial'_1 - i\partial'_2 \\ \partial'_1 + i\partial'_2 & -\partial'_3 \end{pmatrix} A^{-*} \Psi_R = -\frac{1}{c}\partial_0\Psi_L - \frac{imc}{\hbar}\Psi_L. \quad (13)$$

따라서

$$\begin{pmatrix} \partial'_3 & \partial'_1 - i\partial'_2 \\ \partial'_1 + i\partial'_2 & -\partial'_3 \end{pmatrix} A\Psi_R = -\frac{1}{c}\partial_0 A\Psi_L - \frac{imc}{\hbar} A\Psi_L. \quad (14)$$

똑같은 논리로 식 (9)는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \partial'_3 & \partial'_1 - i\partial'_2 \\ \partial'_1 + i\partial'_2 & -\partial'_3 \end{pmatrix} A\Psi_R = -\frac{1}{c}\partial_0 A\Psi_L + \frac{imc}{\hbar} A\Psi_L. \quad (15)$$

그러므로 새 좌표계에서는 $A\Psi_R, A\Psi_L$ 이 디랙 방정식의 해가 된다.

이제 특정한 $A \in SU(2)$ 에 대해 생각해 보자. 다음은 각각 x -축, y -축, z -축을 중심으로 θ 만큼 회전시키는 변환을 준다. ([2] 참조)

$$A_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & i \sin \theta/2 \\ -i \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$A_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$A_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

행렬이 $A_\#(0)$ 에서 $A_\#(2\pi)$ 로 연속적으로 변할 때 좌표는 제 자리로 돌아온다. 그것은 결국 2π 회전이니까. 그런데 디랙 방정식의 해에 대해서는 다음을 얻는다.

$$A_\#(2\pi)\Psi_R = -\Psi_R, \quad A_\#(2\pi)\Psi_L = -\Psi_L.$$

임의의 회전은 위 세 회전의 적절한 곱으로 나타내어질 수 있는데 이를 이용하여 임의의 회전에 대해서도 위 성질이 만족됨을 알 수 있다.

이것이 바로 Ψ_R 과 Ψ_L 의 스핀 성질이다. 한 바퀴 회전을 했을 때 원래대로 돌아오지 않고 원래의 $-$ 가 돼 버리는 것이다. Ψ_R 과 Ψ_L 은 스피너의 한 예다.

질문 1. 식 (6)과 같이 행렬 γ_μ 를 선택하지 않고 다른 γ_μ 를 사용한다면 어떻게 될까?

5 수소 원자에 있는 전자의 디랙 방정식 푸는 법

수소 원자에 있는 전자의 파동 방정식을 푸는 법에 대하여 알아보자. 수소의 원자핵은 양성자 한 개만으로 이루어져 있으며 이 원자핵이 원점에 있으면 이 양성자 때문에 생기는 전자장의 스칼라 포텐셜 $A_0 = \frac{e}{\epsilon} V$ 은 원점까지의 거리에만 의존한다. 즉 $V = V(r)$.²

이 경우 전자의 디랙 방정식은 다음과 같다. ([7, §3.1, 식 (18)] 을 변형하였다.)

$$D\Psi + H\Psi = -\frac{mc}{\hbar}\Psi.$$

단 여기서

$$D := \frac{i}{c}\gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3, \quad H := \frac{c}{\hbar}V(r)\gamma_0.$$

여기서 V 는 거리에만 의존하는 함수다.

디랙 방정식을 구면 좌표계로 나타내기

위 식은 다음 구면 좌표계를 이용하여 푼다.

$$x_0 = t, \quad x_1 = r \sin \phi \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \phi \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \phi.$$

이러면

$$J := \frac{\partial(x_0, x_1, x_2, x_3)}{\partial(t, r, \phi, \theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \\ 0 & r \cos \theta \cos \phi & r \cos \phi \sin \theta & -r \sin \phi \\ 0 & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

이를 이용하여 디랙 연산자를 구면 좌표계로 표현하면 다음과 같다.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{i}{c}\gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_0 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{c}\gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} J^{-1} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_r \\ \partial_\phi \\ \partial_\theta \end{pmatrix}.$$

²사실은 $\frac{e}{\epsilon}V = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ 인데 다음 전개에서 이 구체적인 모양은 상관이 없다.

이를 정리하면³ 다음이 얻어진다.

$$D = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \frac{i}{c} \partial_t + \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 \\ -\nu_1 & 0 \end{pmatrix} \partial_r + \begin{pmatrix} 0 & \nu_2 \\ -\nu_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{r} \partial_\phi + \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 \\ -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{r \sin \phi} \partial_\theta.$$

단

$$\nu_1 := \begin{pmatrix} i \cos \phi & i e^{-i\theta} \sin \phi \\ i e^{i\theta} \sin \phi & -i \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \nu_2 := \begin{pmatrix} -i \sin \phi & i e^{-i\theta} \cos \phi \\ i e^{i\theta} \cos \phi & i \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \nu_3 := \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ -e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

여기서

$$\nu_j \nu_k + \nu_k \nu_j = 0_2, \quad \nu_j^2 = -I_2 \quad j, k \in \{1, 2, 3\}, j \neq k$$

이고 $\partial_r, \frac{1}{r} \partial_\phi, \frac{1}{r \sin \phi} \partial_\theta$ 은 양의 향을 가진 단위 직교 기저임을 밝혀 둔다.

따라서 $D\Psi$ 의 첫 두 식과 나머지 두 식은 다음과 같다:

$$\frac{i}{c} I_2 \partial_t \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + (\nu_1 \partial_r + \nu_2 \frac{1}{r} \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{r \sin \phi} \partial_\theta) \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = -(\frac{cV(r) + mc}{\hbar}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$-\frac{i}{c} I_2 \partial_t \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} - (\nu_1 \partial_r + \nu_2 \frac{1}{r} \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{r \sin \phi} \partial_\theta) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = +(\frac{cV(r) - mc}{\hbar}) \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

풀기

우리는 고전적 방법인 변수 분리법을 사용한다. 먼저 모든 $\mu = 1, 2, 3, 4$ 에 대하여

$$\psi_\mu(t, r, \theta, \phi) = e^{iEt} \phi_\mu(r, \theta, \phi)$$

³Mathematica를 사용하였다.

라고 가정하자. 여기서 E 는 어떤 실수다. 이를 식 (19)과 (20)에 집어넣으면 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$(\nu_1 \partial_r + \nu_2 \frac{1}{r} \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{r \sin \phi} \partial_\theta) \begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = f(r) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$(\nu_1 \partial_r + \nu_2 \frac{1}{r} \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{r \sin \phi} \partial_\theta) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = g(r) \begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

단

$$f(r) := \frac{E}{c} - \left(\frac{cV(r) + mc}{\hbar} \right), \quad g(r) := \frac{E}{c} - \left(\frac{cV(r) - mc}{\hbar} \right).$$

이제 ϕ_* 가 다음과 같이 어떤 함수들 $Y_*(\phi, \theta)$, $R_*(r)$ 로 쪼개질 수 있다고 가정하자.

$$\begin{pmatrix} \phi_1(r, \phi, \theta) \\ \phi_2(r, \phi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(\phi, \theta) & Y_2(\phi, \theta) \\ Y_3(\phi, \theta) & Y_4(\phi, \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \end{pmatrix} = Y_R(\phi, \theta) R_R(r),$$

$$\begin{pmatrix} \phi_3(r, \phi, \theta) \\ \phi_4(r, \phi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_5(\phi, \theta) & Y_6(\phi, \theta) \\ Y_7(\phi, \theta) & Y_8(\phi, \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_3(r) \\ R_4(r) \end{pmatrix} = Y_L(\phi, \theta) R_L(r).$$

이를 식 (21)에 대입시키면 다음이 얻어진다.

$$\begin{aligned} f(r) Y_R R_R &= \left(\nu_1 \partial_r + \frac{1}{r} \left(\nu_2 \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{\sin \phi} \partial_\theta \right) \right) Y_L R_L \\ &= \nu_1 Y_L \partial_r R_L + \frac{1}{r} \left(\nu_2 \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{\sin \phi} \partial_\theta \right) Y_L R_L. \end{aligned} \quad (23)$$

이 식에 대한 답을 어떻게 구할 수 있을 것인가에 대한 고찰

먼저 Y_L 이 어떤 대각행렬 $\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 미분방정식을 만족시킨다면

$$\left(\nu_2 \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{\sin \phi} \partial_\theta \right) Y_L = \nu_1 Y_L \Lambda. \quad (24)$$

일단은 식 (23)의 마지막 부분을 다음과 같이 간단히 할 수 있다.

$$f(r) Y_R R_R = \nu_1 Y_L \left(\partial_r R_L + \frac{1}{r} \Lambda R_L \right). \quad (25)$$

이 때 다음과 같이 Y_R 을 정의하면

$$Y_R := \nu_1 Y_L \quad (26)$$

다음이 성립한다.

$$f(r)R_R = \partial_r R_L + \frac{1}{r}\Lambda R_L. \quad (27)$$

Λ 가 대각행렬인 덕분에 위 식의 1행은 R_1, R_3 만의 일계미분방정식, 3행은 R_2, R_4 만의 일계미분방정식이 된다.

이제 식 (22)를 변형하여 식 (27)와 같은 식을 얻을 수 있는지 보자. 일단 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} g(r)Y_L R_L &= \left(\nu_1 \partial_r + \frac{1}{r} \left(\nu_2 \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{\sin \phi} \partial_\theta \right) \right) Y_R R_R \\ &= \nu_1 Y_R \partial_r R_R + \frac{1}{r} \left(\nu_2 \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{\sin \phi} \partial_\theta \right) Y_R R_R. \end{aligned} \quad (28)$$

이 때 $\nu_1^2 = -I_2$ 이므로 $Y_L = -\nu_1 Y_R$. 그러므로 어떤 상수 λ_3, λ_4 에 대하여 다음과 같은 식이 성립하면 앞서와 같은 아이디어로 (27)와 같이 $R_\star$ 만의 식을 얻을 수 있을 것이다.

$$\left(\nu_2 \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{\sin \phi} \partial_\theta \right) Y_R = \nu_1 Y_R \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

과연 이 식이 성립할 것인가? 또한 식 24를 만족시키는 Y_L 이 존재하는가?

풀기

식 (24), (29)을 보면 사실 이는 Y_L, Y_R 이 다음 행렬미분연산자의 고유벡터함수임을 말하고 있다.

$$D_1 := \nu_1^{-1} \left(\nu_2 \partial_\phi + \nu_3 \frac{1}{\sin \phi} \partial_\theta \right) = (\nu_1^{-1} \nu_2) \partial_\phi + (\nu_1^{-1} \nu_3) \frac{1}{\sin \phi} \partial_\theta.$$

이 D_1 에 대하여 다음을 알 수 있다.

소정리 1. 임의의 2×1 벡터 함수 Y 가 $D_1 Y = \lambda Y$ 를 만족시키면

$$D_1(\nu_1 Y) = (2 - \lambda) \nu_1 Y.$$

증명. 무엇보다도 다음을 강조하고 싶다.

$$D_1(\nu_1 Y) \begin{cases} \neq (D_1 \nu_1)Y + \nu_1(DY), \\ = (D_1 \nu_1)Y - \nu_1(D_1 Y). \end{cases}$$

이게 성립하는 이유를 이해하려면 먼저 $A = A(t), B = B(t), C = C(t)$ 가 정방행렬함수일 때 다음이 성립함을 살핀다.

$$(A\partial_t)(BC) = A(\partial_t B)C + BA(\partial_t C) + [A, B]\partial_t C.$$

단 여기서 $[X, Y] := XY - YX$. 이제 ν_i 의 여러 성질들, 특히

$$D_1 \nu_1 = 2\nu_1, \quad \nu_1^2 = -I_2, \quad [\nu_1^{-1} \nu_2, \nu_1] = -2\nu_2, \quad [\nu_1^{-1} \nu_3, \nu_1] = -2\nu_3$$

로부터 위 식을 유도할 수 있으며 이로부터 최종 결과가 따라 나온다. $\square$

여기서 고유값이 λ 와 $2 - \lambda$ 로 나오는데 이를 대칭으로 나오게 할 수 있다. 다음 미분연산자를 생각하자.

정의 1.

$$K := D_1 - I_2 = \nu_1^{-1}(-\nu_1 + \nu_2 \partial_\phi + \nu_3 \frac{\partial_\theta}{\sin \phi}). \quad (30)$$

이 K 에 대하여 좀더 알고 싶은 사람은 이 글의 맨 마지막 부분을 보라.

소정리 2. 임의의 2×1 벡터 함수 Y 가

$$KY = \delta Y \quad (31)$$

를 만족시키면

$$K(\nu_1 Y) = -\delta \nu_1 Y.$$

증명. 간단하여 독자에게 맡긴다. $\square$

D_1 과 K 는 I_2 만큼 차이가 나는데 사실 두 연산자는 같은 연산자로 볼 수 있다. 그러나 나중에 알게 되겠지만 K 가 좀더 기하적인 의미가 있고 K 에 대한 고유벡터함수가 자세하게 조사되어 있는 문헌이 있어서⁴ 이제까지 했던 일을 K 를 써서 다시 하자.

⁴[11, Table 7.1]

식 (21), (22)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\nu_1 \partial_r + \frac{1}{r} \nu_1 + \frac{1}{r} \nu_1 K) Y_L(\phi, \theta) R_L(r) = f(r) Y_R R_R(r), \quad (32)$$

$$(\nu_1 \partial_r + \frac{1}{r} \nu_1 + \frac{1}{r} \nu_1 K) Y_R(\phi, \theta) R_R(r) = g(r) Y_L R_L(r). \quad (33)$$

소정리 3. 다음을 만족시키는 2×2 행렬 Y_L 과 두 실수 δ_1, δ_2 는 존재한다.

$$K Y_L = Y_L \Lambda', \quad \Lambda' := \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}.$$

증명. [11, Table 7.1] 참조. □

위 보조정리에 의하여 존재성이 보장되는 Y_L 과 Λ' 을 하나 고정한다. 그리고 Y_R 을 식 (26)로 정의하자. 그러면 앞에서와 똑같이 따져서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$(I_2 \partial_r + \frac{1}{r} I_2 + \frac{1}{r} \Lambda') R_L(r) = f(r) R_R(r), \quad (34)$$

$$(I_2 \partial_r + \frac{1}{r} I_2 - \frac{1}{r} \Lambda') R_R(r) = -g(r) R_L(r). \quad (35)$$

이를 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$R'_3(r) + \frac{1}{r} (1 + \delta_1) R_3(r) = f(r) R_1(r), \quad (36)$$

$$R'_4(r) + \frac{1}{r} (1 + \delta_2) R_4(r) = f(r) R_2(r), \quad (37)$$

$$R'_1(r) + \frac{1}{r} (1 - \delta_1) R_1(r) = -g(r) R_3(r), \quad (38)$$

$$R'_2(r) + \frac{1}{r} (1 - \delta_2) R_2(r) = -g(r) R_4(r). \quad (39)$$

이제 $U_i(r) := r R_i(r)$ 이라 하면 다음이 얻어진다.

$$U'_3(r) + \delta_1 U_3(r) = f(r) U_1(r), \quad (40)$$

$$U'_4(r) + \delta_2 U_4(r) = f(r) U_2(r), \quad (41)$$

$$U'_1(r) - \delta_1 U_1(r) = -g(r) U_3(r), \quad (42)$$

$$U'_2(r) - \delta_2 U_2(r) = -g(r) U_4(r). \quad (43)$$

식 (40), (42)는 U_1 과 U_3 만의 식인데 이로부터 U_1 과 U_3 각자에 대한 이계

미분방정식을 얻을 수 있다. U_2, U_4 에 대한 이계미분방정식은 U_1, U_3 에 대한 이계미분방정식과 동일하다. 이 일차 연립미분방정식 (40)~(43)은 여러 양자역학 문헌에 나온 식과 같다. ([8, 622 쪽], [11, 식 (8.32)], [7, 식 (19)], [9, 식 (4.13)], [10, 18분 41초])

양자화는 어디서 발생하는가?

양자화란 수학적으로 보자면 모든 실수가 아니라 특정한 자연수들에 대해서만 해가 존재한다는 것이다. 이를 이해하기 위해서는 Y_*, R_* 의 식을 구체적으로 이해하여야 Y_* 의 구체적인 식에 대해선 [11, Table 7.1], R_* 의 구체적인 식에 대해선 [7]을 참조하라.

Spin Orbit Operator K 에 관하여

(30)에서 정의한 미분연산자 K 는 사실 spin orbit operator라고 불리는 것이며 [11]에 나와 있는 정의는 다음과 같다.

$$K := \sigma \cdot L \quad (44)$$

단 여기서

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad L := \mathbf{r} \times p, \quad p := -i\nabla = -i \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{pmatrix}.$$

(단 σ_j 는 (1)에 주어진 파울리 행렬이고 $\mathbf{r}$ 은 위치벡터다. 직교좌표계로는 $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$.) 이게 앞의 식과 왜 같은 건지 궁금해 하는 이를 위하여 그 과정을 조금만 적는다.

$$\sigma \cdot L = \sigma \cdot \mathbf{r} \times p = \sigma \times \mathbf{r} \cdot p = \begin{pmatrix} \sigma_2 x_3 - \sigma_3 x_2, \sigma_3 x_1 - \sigma_1 x_3, \sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}$$

이제

$$x_1 = r \sin \phi \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \phi \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \phi \quad (45)$$

라 하면

$$J := \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \phi, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \\ r \cos \theta \cos \phi & r \cos \phi \sin \theta & -r \sin \phi \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

이를 이용하여 디랙 연산자를 구면 좌표계로 표현하면 다음과 같다.

$$K = \left(\sigma_2 x_3 - \sigma_3 x_2, \sigma_3 x_1 - \sigma_1 x_3, \sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1 \right) J^{-1} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\phi \\ \partial_\theta \end{pmatrix}.$$

(단 x_1, x_2, x_3 은 (45)로 치환한다.) 이를 정리하면 K 이 식이 얻어진다.

참고 문헌

- [1] William O. Straub, WEYL SPINORS AND DIRAC'S ELECTRON EQUATION, <http://www.weylmann.com/weyl-dirac.pdf>
- [2] William O. Straub, A Child's Guide to Spinors, <http://www.weylmann.com/spinor.pdf>.
- [3] Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_equation.
- [4] R. Kusner and N. Schmitt, The Spinor Representation of Minimal Surfaces, arXiv:dg-ga/9512003v1.
- [5] Pascal Romon, Julien Roth. The spinor representation formula in 3 and 4 dimensions. Conference on Pure and Applied Differential Geometry, Aug 2012, Leuven, Belgium. pp.300. hal-00857015
- [6] Iskander A. TAIMANOV, Surfaces in three-dimensional Lie groups in terms of spinors, arXiv:0712.4139v2.
- [7] J. Mawhin and A. Ronveaux, Schrödinger and Dirac equations for the Hydrogen atom, and Laguerre polynomials, Archive for the History of Exact Sciences 64 (2010), 429-460.
- [8] P. A. M. Dirac, The Quantum Theory of the Electron, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Vol. 117, No. 778, 1928, pp. 610-624.

- [9] Bjorken and Drell, Relativistic Quantum Mechanics, International series in pure and applied physics, McGraw- Hill, 1964.
- [10] Dietterich Labs, How to solve Dirac equation, <https://www.youtube.com/watch?v=jWYtP-rAoYA>.
- [11] Pascal Kordt, Single-Site Green Function of the Dirac Equation for Full-Potential Electron Scattering, 2012, <http://hdl.handle.net/2128/4548>