행렬의 죠르당 형식(Jordan Form)

이 노트는 행렬의 죠르당 형식에 관련된 내용을 간단히 정리해 놓은 것이다. 증명 없이 사실만을 적어 두기로 한다. 주어진 $n \times n$ 행렬을 A라고 한다.

1. 행렬의 대각화는 적절한 P를 찾아서 $P^{-1}AP$를 대각행렬이 되도록 만드는 것을 말한다. 이것이 가능하려면 P의 각 열(column)이 A의 eigenvector가 되어야 한다. 즉 A의 eigenvector로 basis를 만들 수 있다는 것이 행렬의 대각화의 필충조건이다.

2. 행렬의 일차독립인 eigenvector의 개수가 n개가 못되어서 대각화가 불가능할 때는 차선책으로 Jordan의 형식으로 고칠 수 있다.

3. Jordan 형식으로 고치기 위하여 모자라는 eigenvector에 추가하여 사용하는 벡터는 generalized eigenvector이다. eigenvalue a에 대하여 $(A - aI)^2, (A - aI)^3, \ldots$ 등을 곱하였을 때 0이 되는 벡터를 A의 일반화된 eigenvector라고 한다. 즉, 일반화된 eigenvector는 $(A - aI)^2, (A - aI)^3, \ldots$ 등의 null space의 벡터들이다.

4. 우리가 원하는 형태는 eigenvalue a에 대한 eigenvector h에 대하여 일반화된 eigenvector f가 ($(A - aI)^2 f = 0$인 경우) $(A - aI)f = h$가 되도록 정해지기를 바란다. 즉 이러한 f를 h와 함께 사용할 basis의 하나로 선택하려고 한다. 따라서 f를 정할 때 $(A - aI)^2, \ldots$ 등의 null space에서 $(A - aI)f = h$를 만족하는 것으로 정해야 한다.

5. 이렇게 찾은 일차독립인 h와 f들의 개수가 eigenvalue a의 중복도보다 적다면 $(A - aI)^3$ 등으로 차수를 높이면서 찾아나간다. 이 때, $(A - aI)^3 g = 0$인 경우라면 $(A - aI)g = f$가 되도록 g를 정한다.

6. 우리 교과서의 spectral 정리는 이렇게 계속할 경우 모든 eigenvalue에 대한 eigenvector와 generalized eigenvector를 모두 사용해서 $\mathbb{R}^n$의 basis를 만들 수 있다는 것이다.

7. 이제 이러한 h와 f, g 들을 column으로 사용한 행렬 P를 만들면 $P^{-1}AP$는 Jordan 형식이 될 수 밖에 없다. 왜냐하면 $P^{-1}AP = J$ 라 하면 $AP = PJ$ 이고 그 각 행을 전개할 때 다음 식들이 성립하기 때문이다.

$$Ah_1 = a_1 h_1, \quad Af_1 = a_1 f_1 + h_1, \quad ag_1 = a_1 g_1 + f_1, \quad \text{etc.}$$