

20세기 수학에서 보는 아름다움

아름다움의 수학 - 수학의 아름다움

고려대학교 이과대학 수학과

김영욱

Cover page

“20세기 수학에서 보는 아름다움”이라는 제목은 20세기 수학의 입장에서 보는 아름다움과 20세기 수학 안에서 발견되는 아름다움이라는 두 가지 의미를 가지고 있다.

이 talk에서 원하는 바는 이 두 가지 관점을 함께 설명하고자 하는 것이다. 특히 아름다움 자체를 논하기 보다는 아름다움이 우리에게 어떻게 들어오는가를 살펴보고 싶다.

page 2

이 페이지의 3 개의 그림은 인터넷에서 그냥 아무렇게나 찾을 수 있는 그림들 가운데 수학적 의미를 약간은 가지는 것을 뽑았다고 하겠지만, 크게 의미있는 것은 아니며 단순히 미술에서 아름다움의 예를 든 정도이다.

page 3

수학자가 생각하는 대상은 우선적으로 확실한 정의가 가능한 것이며 이로 부터 점차로 복잡하고 vague한 개념을 향하여 나아간다. 수학자의 입장에서 아름다움과 같은 개념은 매우 부정확한 개념이어서 한 마디로 정의할 수 없다.

page 4

그래서 수학자가 아름다움을 논하려면 공부가 필요하다.

page 5

수학자가 다루는 일상적인 대상들은 down to earth, 구체적이고 확실한 개념들을 기반으로 한다. 이러한 관점에서 보면 “아름다움”과 같은 개념은 저 구름 위에 뜬 것과 같은 불확실하고 부정확하며 추상적인 개념이 된다.

page 6

그래서 공부해 본 결과 옛 사람들이 아름다움에 대해서 말한 대표적인 것 몇 개를 들었으며 이 가운데서 중심되는 개념 가운데 하나로 harmony라는 것을 생각해 볼 수 있다. 이것은 우리가 미술 시간에 배운 “통일과 변화”와 일맥상통하는 것이라고 보인다.

page 7

최근에 수학자들도 아름다움을 정의하고 있으며 그러한 예를 하나 든다. 여기서 아름다움은 efficiency depending on oneself 정도의 개념이다. 즉 비슷한 것들 사이에서는 잘 이해되는 것을 아름답다고 느낀다는 것이고 이는 아름다움이 지극히 개인적인 개념이라는 말이다.

page 8

이제부터 수학에서 아름답다고 하는 몇 가지 예를 본다.

이런 예를 통하여 수학에서는 어떠한 *harmony*를 보여줄 수 있으며, 반대로 일반적인 아름다움에서는 어떤 규칙을 찾아볼 수 있는지를 생각해 보려고 한다. 특히 이런 *harmony*에서 통일을 잘 보여주는 것은 규칙적으로 나타나는 사물의 모양이며 이를 수학에서는 *symmetry*라는 이름으로 잘 부른다. 여기서 변화는 여러 가지로 생각할 수 있겠지만 그러한 *symmetry*를 직접 수학에서 보는 것 대신 조금은 일상적인 대상으로 옮겨 보는 것으로도 상상할 수 있겠다. 이제 부터 나타나는 여러 가지 예에서 이러한 *harmony*를 찾아보고 수학이 어떻게 연관되어 있는가를 생각해 본다.

page 9

첫 번째는 요즈음에 가장 유명한 예인 Benoit Mandelbrot의 Fractal의 그림이다.¹

이 Fractal은 다음과 같이 하여 만들어진 것이다: 우선 복소수 $z = x + iy$ 를 평면의 점 (x, y) 라고 볼 수 있다. 0에서 시작하여 이 복소수를 제곱하고서 복소수 c 을 더하는 조작을 반복할 때 그 결과가 점점 커져서 멀리 도망가는가 아니면 어떤 범위를 벗어나지 않는가에 따라 평면의 점 c 를 두 종류로 나눌 수 있는데 이것을 그린 것이다.

page 10~11

이 두 페이지의 그림들은 앞의 Fractal 그림을 확대하여 부분 부분을 본 것의 일부이다. 이러한 간단한 rule을 따른 조작에서 이렇게 복잡한 그림이 나오는 것은 매우 신기한 현상이며 이것이 함수 $f(z) = z^2 + c$ 의 비선형성(non-linearity: 1차함수가 아니라는 것)에서부터 나타나는 것이다.

page 12

이 페이지의 그림은 앞에서 나타나는 도형들을 활용하여 예술적 작품을 만든 것이다. 이러한 작품은 자체의 (직관적) 아름다움 말고 이 도형이 가지고 있는 의미를 알게 됨으로써 조금 더 그 아름다움에 다가갈 수 있지 않을까라고 생각되지만 실제로 위의 함수가 어떤 작용을 해서 이러한 도형이 그려지는지에 대하여 알아내기가 어려우므로 이만큼만 어려워도 실제로 이 도형의 의미의 도움을 받기가 힘들어 보인다.

page 13

위 보다 조금 단순한 것으로 위상수학(位相數學, topology)에서 나타나는 매듭(knot)을 찾아볼 수 있다. 이의 이론은 매우 발전해 있고 복잡하면서도 중요한 매듭이 많이 있지만 가장 간단하고도 단순한 원은 아닌 것으로 trefoil knot가 있다. 이것은 단 한번 매듭지어져 있는 닫힌 매듭이라고 할 수 있다.

page 14

여기에는 위의 trefoil knot가 수학적으로 조금 모양을 달리하여 나타나는 것과 이것을 비눗물에 담갔다 꺼냈을 때 나타나는 비누막(극소곡면, minimal surface)을 조각으로 나타낸 것을 본다. 이것을 통하여 둘 조각상에서 느끼는 *symmetry*의 아름다움에는 두 가지 수학적인 규칙(knot와 극소곡면)을 동시에 보게 됨으로써 느끼는 점이 들어있는 것이라고 생각할 수 있다.

아래쪽 그림들은 Knot 첫 페이지의 가운데 그림과 함께 고대부터 나타난 trefoil knot가 여러 형태로 변형된 문양이며 대부분 종교적인 문양들이다.

¹Benoit Mandelbrot는 며칠 전에 유명을 달리하였다.

page 15

이 쪽의 무늬는 카오스(chaos)의 나비효과로 유명한 Lorenz의 기후 예측 미분방정식의 해의 한 가지 그림이다. 이것은 strange attractor라고 이름붙였다. 이러한 카오스는 수학에서는 혼돈을 의미하는 것이 아니라 일정한 수학적 규칙을 가지지만 현실적으로는 사람이 완벽하게 계산해낼 수 없는 미세한 복잡함을 갖는 현상을 말한다. 이러한 미세한 복잡성을 국소적인 혼돈이라 할 수 있으며 이러한 조그만 복잡성이 결과적으로는 커다란 현상의 차이를 보이는 것을 카오스라고 부르고 있다. 여기서 나타나는 그림의 아름다움도 그 수학적 현상을 이해함으로써 느낌의 차이가 커지는 것 같다.

page 16

앞에서 나왔던 극소곡면들의 예를 두 개 들었으며(왼쪽 그림) 이것들은 대칭성(symmetry)가 완전하게 들어나는 예이다. 하나는 19세기에 발견된 것으로 Enneper의 예이며, 또 하나는 20세기에 발견된 대표적인 것으로 Costa의 예이다. 오른쪽 그림은 유클리드 공간이 아니라 2차원 특수상대성 이론의 공간인 3차원 시공간에서 발표자와 수학과의 양성덕 교수가 발견한 Costa의 극소곡면과 유사한 극대곡면이다. 이들의 특성은 단순히 넓이가 국소적으로 최소 또는 최대가 된다는 단순한 조건에서 나타나는 수학적 대상으로 수학에서 직관적인 아름다움을 말할 때 대표적인 예이다.

page 17

왼쪽 그림은 수학에서 특정한 알고리즘과 관련해서 일정한 규칙을 가지고 나타나는 계산을 평면에 그림으로 현상화한 것이다. 오른쪽은 Mondrian의 그림으로 미술적으로 유사성을 보여준다. 미술 작품이 수학적 rule을 여럿 포함하고 있다고 할 수도 있다는 느낌을 받는다.

page 18

이제부터 수학에서 이론을 이해하는 방법을 알아보고 이것이 앞에서 본 예술 작품을 감상하는 데에 어떤 도움을 줄 수 있는지 어떤 유사성이 있는지를 생각해본다.

page 19

이 Joke는 우리가 기호를 통하여 개념을 전달받을 때 매우 복잡한 생각을 하고 있음을 보여준다.

page 20

$x^2 = 2$ 를 풀 때 좌우의 두가지 답은 서로 전혀 다른 이야기를 하고 있다. 보통 학교에서 공부할 때는 왼쪽은 맞고 오른쪽은 틀리다고 하지만, 실제로 틀리고 맞는다고 하면 안 되고 이런 말을 하려면 이렇게하고 저런 말을 하려면 저렇게 쓴다고 해야 한다. 이 방정식을 푼다고 할 때는 이 두 가지 가운데 한 가지를 알고 사용하는 것보다는 두 가지를 다 알고 적재적소에 사용할 때 이 방정식에 대한 이해가 높다고 할 수 있다. 실제로 왼쪽의 방법은 서양 수학의 대표적인 개념적 방법이며, 오른쪽의 방법은 2000년도 더 된 동양수학의 대표적 방법이다.

page 21

비슷한 이야기를 도형에 대하여도 할 수 있다. 오른쪽의 원을 직관적으로 동그랗다고 이해하는 것을, 중심에서의 거리가 일정한 점이라는 rule로 바꾸어서 방정식을 사용해서 표현하면 왼쪽의 원의 방정식이 된다. 원을 잘 이해하는 것도 이러한 두 개의 전혀 다른 관점 사이의 관계를 잘 이해하고 활용하는 것이 된다.

이와 같이 어떤 대상(원)을 잘 이해하려면 이를 이해하기 위해서 사용하는 도구(방정식)이 필요하게 된다. 이런 것이 없이 직관적으로 이해한다는 것은 생각하기 힘들다. 직관적으로 받아들일 수는 있지만 이해라고 부르는 것은 어렵다. 즉 이해에는 이해에 쓰이는 도구가 필요하며 그런 것이 없으면 만들어야 한다. 이 경우에는 사람들이 원을 이해하기 위해 방정식을 만들어 쓴 경우라고 할 수 있다.

즉 이해한다는 것은 자기가 잘 쓸 수 있는 도구를 통해 이해하고자 하는 대상을 받아들여 익숙하게 만드는 것이며 이 둘 사이의 관계에 숙달됨으로써 둘을 하나로 만드는 과정이라고 할 수 있다.

page 22

이제 수학에서의 symmetry라는 개념을 알아보면서 수학의 추상성에 대한 개념을 isomorphism의 개념을 통해 알아본다. 여기 주어진 세 개의 예는 서로 연관성이 없는 전혀 다른 현상에 대한 예이지만 이 가운데서 수학적으로 동일한 rule을 뽑아볼 수 있다. 이것은 어떤 한 가지 조작 i 를 곱하는 것, 시간이 한 시간씩 흐르는 것, 그리고 90도만큼씩 회전하는 것을 반복할 때 4번을 반복하면 제자리에 돌아오는 규칙 등이 이 세 가지 현상에서 모두 동일하게 일어나며 따라서 현상을 무시하고 규칙만을 보면 동일한 모양이다, 즉 동형(同形)이다 또는 isomorphic이라고 말한다. 이러한 동형 개념을 통하여 구체적인 예에서 수학적 이론의 모형을 뽑아내고 또 반대로 적용하는 것이다.

한편 여기서 나타나는 90도 회전 등은 180도 회전(점대칭)이나 선대칭 등의 특성을 갖는 또 다른 예로서 더 일반화된 symmetry라고 할 수 있다. 점대칭이나 선대칭은 단 두번만 하면 제자리로 돌아오는 것이지만 저것은 4번을 거듭해야만 제자리로 돌아오는 더 복잡한 대칭이며 수학에는 이보다 더 복잡한 대칭이 무수히 많다. 이것들을 대수학의 군론(群論, group theory)에서 전개하게 된다.

page 23

이와 유사한 것을 올해 4월 23일에 발표하신 국어교육과 이남호 교수님의 발표에서 찾아본다. 교수님의 발표에서 이효석의 “메밀꽃 필 무렵”의 기본 골격을 간단한 도형을 사용하여 설명하였으며 이는 소설의 구성과 이 도형 사이의 일종의 동형관계를 나타낸 것이라고 볼 수 있다. 이러한 설명을 발표자는 이교수님이 자신의 다른 책에서 김승옥의 “무진기행”을 설명하는 데서 보았으며 이러한 설명은 소설을 이해하는데 도움이 매우 많이 된다는 것을 느꼈다. 나아가서 이러한 소설의 설명에서 이러한 동형 diagram을 이용한 설명 방법 자체의 아름다움을 느끼게 된다. 이것을 isomorphism 자체의 아름다움이라고 할 수 있겠고 이것이 이론을 사용해서 이해하는 데서 느끼는 감동과 아름다움이라고 생각된다.

page 24

수학에서는 어떤 대상을 이해하는데 새로운 대상을 쓰지 않고 자기 자신을 쓰는 경우가 있다. 점과 직선만의 기하학에서는 많은 경우에 ‘점’을 ‘직선’이라고 생각하고, ‘직선’은 ‘점’이라고 생각하여도 된다. (이 때 두 직선이 한 점에서 만난다는 것은 이 두 점(원래의 직선)이 한 직선(원래의 점) 위에 놓인다고 고쳐 말해야 한다. 마찬가지로 그 반대 방향도 똑같이 바꾸어 말한다.) 이렇게 하여도 그 사이의 관계는 망가지는 일이 없어서 이쪽에서 옳은 이야기는 저쪽으로 바꾸어 말해도 틀리지 않다. 대표적인 예로서 사영기하의 대표적이 정리 Pappus의 정리를 본다. 왼쪽은 파프스의 정리를 그린 것이며 오른쪽은 이 정리에서 점을 직선으로 바꾸고 직선을 점으로 바꾸어 그린 것이다. 파프스의 정리가 옳은 것과 같이 이를 뒤집어 고친 정리도 옳다.

이렇게 자기 자신과 똑같은 모양의 것을 써서 자기 자신을 설명하는 것, 그리고 당연히도 동시에 자기 자신을 써서 자기 자신을 설명하는 그 대상을 설명하는 것을 수학에서는 쌍대성(duality)라는 이름으로 부른다. 위의 예에서 자기 자신은 ‘점과 선과 그 관계’이며, 자기를 설명하는 자기와 똑같은 모양인 것은 ‘선과 점과 그 관계’이다.

page 25

이와 유사한 것을 예술로 승화시켜서 잘 나타낸 사람이 M. E. Escher이다. 여기서 보는 두 개의 그림은 이러한 쌍대성과 symmetry를 단적으로 보여주는 예이며 앞에서 이야기했던 수학적 내용을 직관적으로 보여주는 미술 품이다. 왼쪽은 회전대칭과 함께 위의 쌍대성의 설명을 비유적으로 보여준다. 오른쪽 그림은 원판 안에서 나타낼 수 있는 대칭성을 보여주며 그것이 갖는 철학적 의미를 함축해서 표현해 준다.

page 26

앞에서 의도한 바대로 예술과 수학의 연관성을 알아보려 한다. 예술가의 생각은 예술작품을 통해서 내게 전달된다. 그리고 수학자의 생각은 기호들을 통해서 내게 전달된다. 이렇게 전달될 때 어떤 일이 벌어지는가를 살펴봄으로써 아름다움을 어떻게 받아들이는가를 생각해 본다.

page 27

생각을 전달하는 방법을 알아보기 위하여 한 가지 사고 실험을 한다.

page 28

한 사람은 정상적인 사람으로 왼쪽과 같은 이름의 색깔을 보며 왼쪽과 같이 본다. 또 다른 사람은 왼쪽 사람이 보는 것과 똑 같은 것을 볼 때 오른쪽과 같이 색깔을 본다.

한 사람이 다른 사람에게 ‘이것은 빨강다’라고 했을 때 전달되는 것은 무엇인가? 그리고 이 두 사람이 같이 살아가는데 어떤 문제가 있을 수 있는가?

page 29

실제로 이 두 사람이 여기 보는 것과 같이 생각하고 행동한다면 아무런 문제가 발생하지 않는다.

이러한 생각을 통해서 한 사람이 다른 사람에게 ‘빨강다’는 말을 통해서 전달한 개념은 실제로 빨강다는 느낌 자체가 아니라는 것이며 이 두 사람이 아무 문제 없이 살 수 있게 해 주는 것은 이 빨강다는 느낌이 아니라 이 색깔들이 다른 색깔들과 갖는 관계의 구도의 동일함(동형)이라는 것이다.

이를 통해서 우리가 아름다움을 전해받을 때에도 이와 유사하게 내가 가지고 있는 어떠한 구도에 맞는 개념을 전달받으면 아름답다고 느낄 것이라는 것이며 내가 가진 구도가 더 정밀하고 더 방대할 수록 내가 느끼는 아름다움도 더 아름다울지도 모른다는 것이다.

page 30

영화 Matrix III 시작 부분의 한 장면을 본다.

이 영화에는 많은 재미있는 볼거리가 있다.

page 31

이 장면에서 두 사람의 대화는 위에 설명한 것과 거의 같은 개념을 설명한다. 실제로 이 영화는 전체가 이러한 동형 개념 위에 서 있으며, 많은 자잘한 재미있는 것들을 품고 있다.