1 유클리드 기하학
1 넓이와 행렬식

기하학 강의 (김영욱)

2010년

차 례

이 절의 목표

1. 단위 정사각형의 넓이가 1이고, 영역을 두 부분으로 나누었을 때 각각의 영역의 넓이의 합이 전체 영역의 넓이라는 성질만을 가지고 평면에서의 넓이를 정의할 수 있음을 알아본다. 특히 이 성질은 평면의 벡터에 대한 행렬식을 정의하는 성질과 동일한 것임을 알아본다.
   이로부터 평행사변형의 넓이가 왜 행렬식의 값으로 표현되는가를 이해한다.
2. 삼각형의 넓이공식을 일반화하여 다각형의 넓이 공식과 미적분학에서 선적분에 의한 공식을 유도할 수 있다.
3. $\mathbb{R}^3$ 의 평행육면체의 넓이가 꼭지점의 행렬식으로 표현됨을 증명한다.
4. $\mathbb{R}^3$ 의 평행사변형의 넓이가 두 변의 외적의 크기로 표현됨을 알아본다.

차 례

행렬식의 정의

보통 2×2 행렬의 행렬식

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

은 수학 계산의 여러 곳에 나타난다. 이러한 계산 경험만으로도 이 값이 중요하다는 것을 알 수 있지만 이 값은 무엇일까? 여러 곳에서 여러 맥락으로 나타나는 $ad - bc$ 이지만, 우리는 평행사변형의 넓이라는 관점에서 보려고 한다. 즉, 위의 행렬식의 절대값 $|ad - bc|$ 는 두 벡터 (a, b) 와 (c, d) 를 두 변으로 갖는 평행사변형의 넓이와 같다.

Theorem

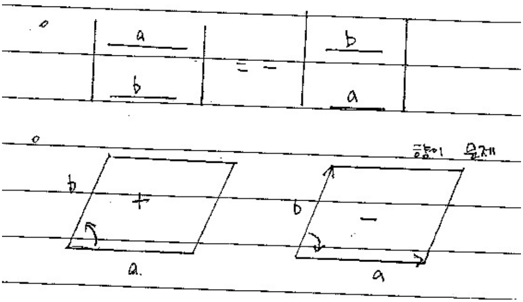
(a, b) 와 (c, d) 를 두 변으로 갖는 평행사변형의 넓이는 $|ad - bc|$ 이다.

이 정리는 초등기하를 사용하여 확인할 수 있다.

문제

$a > c > 0, d > b > 0$ 일 때 위의 정리가 성립함을 도형을 사용하여 증명하여라.

그러나 여기서는 조금 색다른 방법을 써서 알아보려고 한다. 우선 두 벡터 $\mathbf{x} = (a, b)$ 와 $\mathbf{y} = (c, d)$ 를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이는 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 의 함수이다.
여기서 평행사변형의 넓이는 양수이다. 그러나 우리는 조금 다르게 생각하려고 한다. 마치 정적분을 계산하던 것처럼 하자.

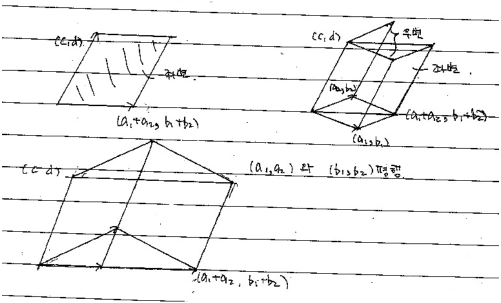


조금 더 정확하게 두 벡터 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$가 있을 때 $\mathbf{x}$에서 $\mathbf{y}$를 바라보는 방향이 시계 반대방향이면 넓이가 양수가 되고, 반대로 시계방향이면 넓이가 음수가 되기로 하면, 이제 이 넓이함수는 음수값도 갖는 부호를 갖는(signed) 넓이함수가 된다. 이 함수를 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 라고 하자.

Lemma

$A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 는 $\mathbf{x}$ 의 *1*차함수이고, 또한 $\mathbf{y}$ 의 *1*차함수이다.

(증명) $\mathbf{y}$가 고정된 벡터이고 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 라 하자. 우리가 비교하려는 것은 $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ 와 $A(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + A(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ 이다. 이 둘이 일치함은 다음 그림에서 명백하다.



한편 $A(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 와 $\alpha A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 가 같은 값을 가진다. (Why?)

Lemma

$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -A(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ **가 성립한다.**

이는 넓이에 부호를 주는 방식에서 명백하다. 그리고 너무도 당연하게 다음이 성립한다.

Lemma

$\mathbf{x} = (1, 0)$ **이고** $\mathbf{y} = (0, 1)$ **일 때,** $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ **이다.**

이제 이 세 가지 사실을 가지고 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 를 계산하여 보자. 우선 다음 사실이 성립함을 보이자.

Corollary

1. 모든 $\mathbf{x}$에 대하여 $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ 이다.
2. 모든 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$에 대하여 $A(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 이다.

(증명) $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ 에서 두 변수의 순서를 바꾸면 부호가 바뀐다. 따라서

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

이다. 그러므로 $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ 이다. 한편,

$$A(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + A(\alpha\mathbf{y}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha A(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

이다. □

정리의 증명. 편의를 위하여

$$A((a,b),(c,d)) = A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

로 나타내기로 하자. $a \neq 0$이라 하면

$$A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

이다. 여기서 $d - \frac{bc}{a} = 0$ 이면 $ad - bc = 0$ 이 되어 위의 함수의 값은 $ad - bc$와 일치한다.

만일 $d - \frac{bc}{a} \neq 0$ 이면 위의 함수값은

$$A \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} = a\left(d - \frac{bc}{a}\right) A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ad - bc$$

가 된다. 이제 $a = 0$ 인 경우를 생각해 보자. 관계식

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

는 $a \neq 0$ 일 때 성립한다. 그리고 직관적으로 이 식의 양변은 a 에 대하여 연속함수이다. 따라서 이 식은 $a = 0$ 일 때도 성립하여야 한다. $\square$

행렬식 = 넓이

이 정리의 증명을 보면 평행사변형의 넓이가 $ad - bc$ 임을 보이는 데 단지 위의 세 도움정리의 공식만을 사용하고 있다. 이 사실은 부호를 갖는 넓이가 이 세 개의 조건만으로 완전히 정하여진다는 것을 이야기하고 있다. 즉, 2×2 행렬의 행렬식은 이 두 행벡터가 만드는 평행사변형의 부호를 감안한 넓이라고 정의하여도 되며 이를 계산하는 공식들은 넓이가 가지는 가장 기본되는 세 개의 공식에서부터 자연스럽게 유도된다는 것이다.

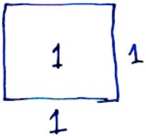
차 례

넓이

이제 초등학교 때 넓이를 어떻게 배웠었는지 기억하여 보자.
보통 초등학생들은 넓이를 배울 때 사각형의 넓이, 삼각형과 평행사변형의 넓이, 그리고 일반적인 다각형 영역의 넓이 순으로 공부한다. 중학교에서는 원의 넓이를 배우고, 고등학교에 가면 적분으로 주어지는 넓이에 대하여 공부한다.
고등학생까지도 넓이는 당연히 있는 것이고 그 넓이를 계산한다고 생각하고 있지만 사실 "왜 넓이가 당연히 있는가?" 하고 물어보면 한 번도 생각해 본 적이 없는 사람들이 많을 것이다. 넓이가 당연히 있다면 넓이를 처음 배우기 시작할 때부터 당연히 있어야 한다.
그리고 넓이를 처음 배울 때의 쉬운 도형에서는 왜 당연한지도 쉬울 것이다. 그러니까 맨 처음으로 돌아가자.

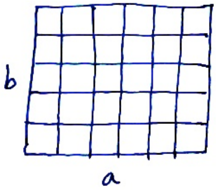
초등학교

맨 처음에 우리가 넓이를 배울 때는 한 변의 길이가 1인 정사각형을 그려 놓고 이 정사각형의 넓이는 1이다 라고 배웠던 것이 생각날 것이다.



이제 여기서 왜 이 정사각형은 넓이를 가지는가? 그리고 이 정사각형의 넓이는 왜 1인가? 라고 물어보면 어떤 답을 할 수 있는가? 초등학교 선생님의 설명을 되돌려 생각해 보면 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이는 1이다 라고 했지 그 이유가 있지 않았다. 즉 이것은 정의이지 어떤 (수학적) 이유에서 나온 이야기가 아니다.

그러면 두 변의 길이가 각각 a, b 인 직사각형의 넓이는 어떤가? 우선 이 두 변의 길이가 자연수인 경우부터 시작한다. 초등학교에는 다음 그림과 같은 것에서 작은 정사각형의 개수를 세는데서 곱셈을 배우며 동시에 직사각형의 넓이를 배운다.



이제 고등학교를 마친 우리가 보기에 이것 또한 당연한 것이며 금방 수학적 귀납법을 쓰면 증명할 수 있다는 것도 알 수 있다.

문제

두 변의 길이가 자연수인 직사각형의 넓이 공식을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여라.

고등학교

이제 다 된 것인가? 이 문제를 풀 수 있다면 거의 다 된 것이다. 이 다음은 변의 길이가 유리수 일 때는 어떻게 되는가, 그리고 실수가 되면 어떻게 설명하는가 하는 것이다. 유리수는 분모만큼 더 잘게 나누면 되고, 실수는 유리수에 극한을 사용하면 될 것이다.

문제

직사각형의 한 변의 길이는 자연수이고, 또 한 변의 길이가 유리수일 때 그 넓이 공식을 설명하여라. 또 두 번째 변의 길이가 실수일 때 그 넓이 공식을 설명하여라.

대학교

하지만 이 문제를 푸는 데 과연 변의 길이가 1 인 정사각형의 넓이가 1 이라는 사실 말고는 쓰는 것이 없는가? 잘 안 느껴지겠지만 당연하게도 다음과 같은 사실을 사용한다 : 두 개의 정사각형을 이어 붙인 도형 (직사각형) 의 넓이가 각각의 정사각형의 넓이 (이 넓이는 1 이었다) 를 합한 $1 + 1 = 2$ 가 된다는 사실을 사용한다.
아무리 당연해 보여도 이것을 가정하지 않으면 안 된다. (다시 말하면 두 도형을 이어붙인 도형의 넓이가 각각의 도형의 넓이의 합과 같게 되지 않는다면 이런 일을 할 수도 없고 넓이가 우리가 생각하는 그런 넓이가 되지 않을 것이다.) 따라서 이 성질은 넓이의 가장 핵심적인 성질이라고 하지 않을 수 없다. 다시 말하면 도형 D 가 두 부분으로 나뉘어져서 $D = D_1 \cup D_2$ 라고 쓸 수 있고 이 두 부분은 교차하는 부분이 없어서 $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ 일 때, 넓이 A 는 다음 성질을 만족시킨다 : [1]

$$A(D) = A(D_1) + A(D_2).$$

[1] 이것을 넓이 함수의 additivity 라고 한다.

Summary

초등학교에서 배운 사각형의 넓이를 간추린다면, 가로 세로 각각 1 인 정사각형의 넓이를 1이라고 정하고, 두 도형을 겹치지 않게 놓았을 때 이 전체 넓이는 각각의 넓이의 합이라고 하기로 하면, 가로 세로가 각각 자연수 a, b 인 직사각형의 넓이는 ab 이다. 여기서 두 개의 가정이 매우 중요하다는 사실은 이것을 가정하지 않고는 넓이를 이야기할 수 없기 때문이다.

중요한 사실은 넓이를 정의하는 이 두 조건이 넓이를 정의하기 위하여 부여하는 조건이지 어떤 사실의 당연한 결과는 아니라는 것이다. (즉 우리가 증명할 수 있는 성질의 것이 아니다.) 예를 들어 가로 세로가 각각 1 인 정사각형의 넓이가 1이 아니고 4라고 하면 어떻게 되는가? 큰 문제는 없다. 모든 직사각형의 넓이가 원래의 네 배가 될 뿐이다. 이러면 안되는 것 같지만, 가로 세로가 각각 1 inch 인 정사각형의 넓이를 우리는 몇 cm^2 라고 하는가? 즉 가로 세로가 각각 a, b inch 인 직사각형의 넓이는 몇 cm^2 인가를 항상 이야기하기로 하면 위와 비슷한 상황이라는 것을 알 수 있다. 이런 것을 하면 안 될 이유는 없다. 즉 위의 조건은 단지 조건이지 꼭 그래야만 하는 것은 아니다. (그래도 이렇게 하는 것이 아니면 매우 불편해서 위의 inch와 cm^2 처럼 하는 일은 절대로 없을 것이겠지만 말이다.) 두 번째 것도 마찬가지이다. 이렇게 하지 않으면 넓이라고 할 수도 없겠지만 이것 또한 넓이를 정하는 조건으로 부여한 것이다. (이것 또한 필수적인 조건이다.)

이제 직사각형의 넓이가 어떻게 정의되었는지 알면 나머지 도형들의 넓이, 즉, 평행사변형, 삼각형, 다각형 등의 넓이가 어떻게 된 것인지도 알 수 있을 것이다.
자 이제 위의 두 조건을 앞 절의 행렬식을 정의하는 조건들과 비교하여 보자. 행렬식의 두 조건이 이 두 조건과 똑 같은 말이라는 것을 알아볼 수 있겠는가? 이것이 눈에 보인다면 행렬식이란 넓이다 라는 말이 무슨 뜻인지도 알 수 있을 것이다.

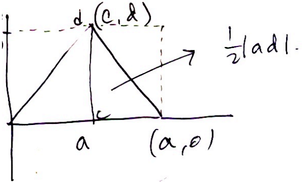
차 례

삼각형의 넓이 (1)

이제 평면의 다각형의 넓이를 알아보자.
우선 쉬운 경우로 삼각형의 세 꼭지점 가운데 하나가 원점이고 밑변이 x축 위에 놓인 경우를 살펴보자. 이 삼각형의 다른 두 꼭지점의 좌표는 $(a, 0)$ 와 (c, d) 이다. 다음 그림에서 보는 바와 같이 이 삼각형의 넓이는 점선과 두 축으로 둘러싸인 직사각형의 넓이의 반이므로

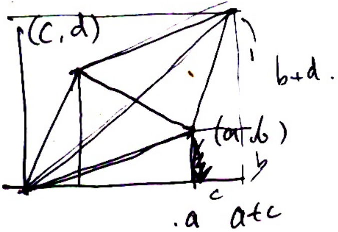
$$\frac{1}{2}|ad| = \frac{1}{2}|ad - 0c|$$

이다.



삼각형의 넓이 (2)

이제 한 꼭지점은 원점에 있지만 변들이 일반적인 위치에 놓인 경우에는 아래 그림에서와 같이 원점을 꼭지점으로 하는 이 삼각형의 두 변을 평행이동하여 평행사변형을 만들자.



2

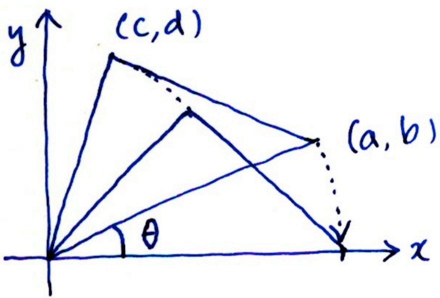
그러면 삼각형의 넓이는 평행사변형의 넓이의 반이다. 그런데 평행사변형의 넓이를 계산하면,

$$|(a+c)(b+d)-ab-cd-2bc| = |ad-bc|$$

이다.

삼각형의 넓이 (3)

조금 더 일반적인 방법을 사용하기 위해서 원점을 포함하는 한 변을 회전하여 x축 위에 가져다 놓고 맨 처음의 방법을 쓰기로 해 보자. 어떤 계산을 하여야 하는가? 그림에서와 같이 벡터 (a, b)를 회전하여 x축에 가져다 놓으려면 몇 도를 회전하는가?



그 각을 θ라 하면 $\tan\theta = b/a$이다. 그러므로

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이 되고 우리의 회전 행렬은 $-\theta$ 만큼의 회전이 되니까

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

이 되고, 따라서

이를 따라 점 (a, b) 와 (c, d) 를 회전하면

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} ac+bd \\ ad-bc \end{pmatrix}$$

가 된다.

그러니까 위에서 계산했던 공식을 쓰면 넓이는

$$\frac{1}{2}\left|\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{ad-bc}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{1}{2}|ad-bc|$$

가 된다.

문제

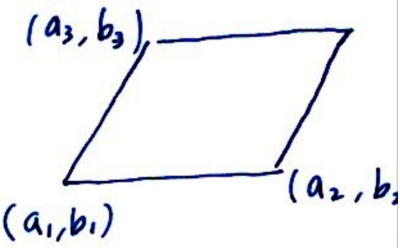
두 변 벡터의 내적을 사용하여 삼각형의 넓이 공식을 유도하여 보아라. (삼각형의 넓이 공식 $(ab\sin\theta)/2$를 사용한다. 여기서 $\sin\theta$를 계산하는데 내적을 활용하자.) 또, $\sin\theta$를 계산하는데 외적을 사용하면 어떤 계산이 되는가?

삼각형의 넓이 (4)

삼각형의 넓이를 계산하는 것은 항상 평행사변형의 넓이를 통해서이고, 두 변 벡터가 $(a, b), (c, d)$ 인 평행사변형의 넓이는 다음 행렬식의 값의 절대값이다.

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

이제 삼각형의 세 꼭지점 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ 이 주어졌을 때 이 삼각형의 넓이를 구하여 보자.



두 변은 $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$, $(a_3 - a_1, b_3 - b_1)$ 이므로 넓이의 두 배를 계산하면

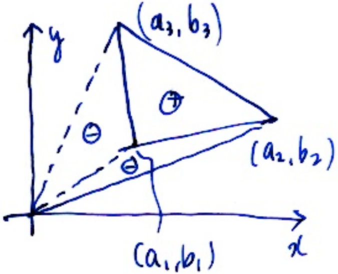
$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \tag{3}$$

의 절대값이라는 간단한 공식이 나온다.

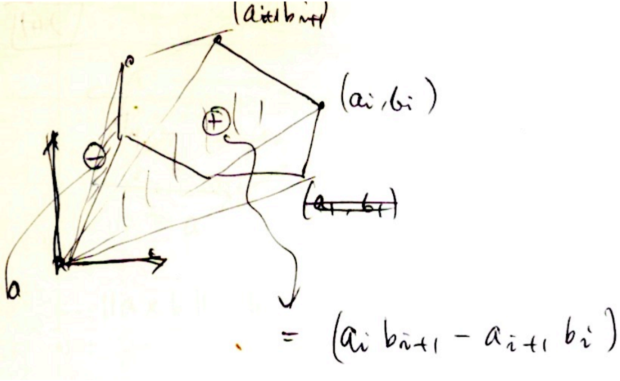
이 공식을 보면 다음 그림과 같이 생각해서 얻은 것과 같다는 것을 알 수 있다.



이 때 원점을 품지 않는 변의 방향이 시계방향이면 넓이는 음수가 되어 필요없는 부분이 상쇄된다는 것에 주의하자.

다각형의 넓이

이제 일반적인 다각형의 넓이도 계산할 수 있다. 그림과 같이 꼭지점이 $(a_i, b_i), i = 1, \ldots, n$ 인 볼록 n각형의 넓이를 구해보자. 우선 $(a_n, b_n) = (a_0, b_0)$ 라고 놓기로 하자.
다음과 같이 그림을 그려 보자.



그러면 이 다각형의 넓이는 다음과 같다는 것을 알 수 있다.

$$\text{넓이} = \frac{1}{2}\Big|(a_1b_2 - a_2b_1) + \cdots (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}) + (a_nb_1 - a_1b_n)\Big| \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}b_i - a_ib_{i-1})\right| \tag{5}$$

Example

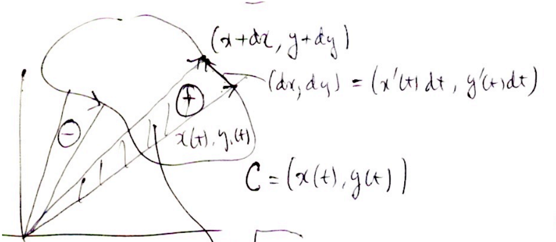
이 사실을 수학적 귀납법을 사용하여 증명할 수 있다. 그 과정을 설명하여 보아라.

차 례

미적분 공식

이제 대학교 1학년에서 공부한 미적분학의 맨 뒤에 나오는 그린의 적분정리와 그의 응용으로 영역의 넓이를 계산하는 공식을 기억하는가?

평면의 영역의 경계가 닫힌 곡선 C라고 하자. 이제 마치 극좌표에서와 같이 다음 그림을 그리면, 곡선 C의 작은 부분은 점 (x, y) 에서 점 $(x + dx, y + dy)$ 라고 쓸 수 있다.



$$\doteq \frac{1}{2}\left[x\cdot(y+dy) - y(x+dx)\right] = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

여기서 $(dx, dy) = (x'(t)dt, y'(t)dt)$ 이다. 이제 원점과 이 두 점이 만드는 삼각형을 생각하면 이 삼각형의 넓이는 원점과 이 두 점을 잇는 두 선분과 곡선의 작은 부분이 이루는 영역의 넓이와 거의 같다고 할 수 있다. 그런데 이 삼각형의 넓이는 다음과 같이 쓰면 된다.

$$\frac{1}{2}[x(y+dy) - y(x+dx)] = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

그러므로 이 곡선 C를 경계로 하는 영역의 넓이는 이를 모두 합하고 dt를 0으로 보내서 얻은 적분인

$$\frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

로 나타낼 수 있다.

여기서 원점을 중심으로 x축에서부터 잰 각을 θ로 나타내기로 하면 (즉, 극좌표를 생각하면), 거의 모든 점에서 $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ 이고 따라서

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \quad \text{즉,} \quad \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

이 된다. 그러므로 여기의 좁은 삼각형 하나의 넓이는 대략 좁은 부채꼴의 넓이를 계산한 것과 같다는 것을 알 수 있다. 그리고 위의 넓이 적분 공식은 극좌표 넓이 공식인 $(1/2)\int_C r^2 d\theta$ 와 같다.

차 례

부피

$\mathbb{R}^3$ 의 평행육면체의 부피를 생각하여 보자. 우리가 맨 처음에 했던 것처럼 부호를 준 부피의 성질이 간단히,

1. 단위 정육면체의 부피가 1이라는 것과
2. 두 모서리의 순서를 바꾸어 향을 바꾸면 부피의 부호가 바뀌기로 정하고,
3. 한 모서리 벡터를 두 벡터의 합으로 표시하면 부피는 이 두 벡터 각각에 대한 부피의 합으로 나타내어진다

는 사실로부터 완전히 정하여진다는 것을 확인하면, 평행육면체의 부피는 한 꼭지점을 공유하는 세 모서리 벡터의 함수로서 이 세 벡터의 행렬식의 값이 된다는 것을 쉽게 알아볼 수 있다.

1학년 미적분학에서는 이 세 모서리 벡터가 a, b, c일 때 주어진 평행육면체의 부호를 준 부피는

$$a \cdot (b \times c)$$

라는 공식으로 주어진다는 것을 증명하였고, 이어서 이것이 행렬식의 값이라는 것을 알아보았다.
이 때 증명에 사용된 방법은 외적의 성질과 기하학을 썼으며, $b \times c$ 라는 벡터는 b, c와 수직이고 이를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 길이로 가지는 벡터라고 정의하였었다.
그러나 $b \times c$가 b와 c에 수직이라는 사실만 알고 이 외적의 크기를 모른다고 가정하고, 위의 사실들과 1학년 미적분학의 기하를 다시 보면 $b \times c$라는 벡터의 크기가 b, c를 변으로 하는 평행사변형의 넓이가 되어야 한다는 사실을 역으로 알아낼 수 있다.

문제

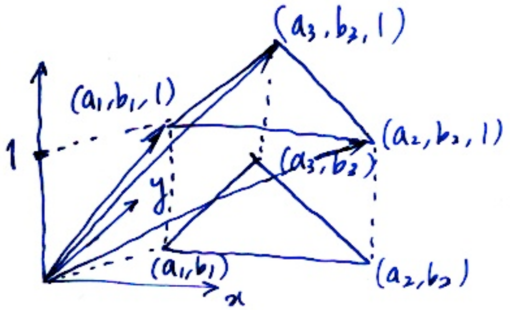
$b \times c$가 b와 c에 수직이라는 사실만 가정하고 위의 계산들로부터 $b \times c$의 크기가 b와 c가 두 변인 평행사변형의 넓이임을 보여라. 또,

1. $b \times c$가 b와 c의 선형함수이고,
2. b, c와 수직하며,
3. $b, c, b \times c$는 오른손 법칙을 만족시키며,
4. b, c가 orthonormal basis 가운데 두 개일 때 $b \times c$는 세 번째 basis 벡터가 된다.

는 사실만 사용하여 $b \times c$의 크기는 항상 b와 c를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이가 됨을 설명하여라.

삼각형의 넓이 (5)

이제 평면의 세 점 (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)을 꼭지점으로 하는 삼각형의 넓이를 다시 보자.



그림과 같이 이 세 꼭지점을 xy 평면 위로 1만큼 들어올리면 이 세 점의 좌표가 각각 $(a_1, b_1, 1)$, $(a_2, b_2, 1)$, $(a_3, b_3, 1)$이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는 다음과 같이 행렬식으로 나타내어진다.

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

앞에서 구한 공식과 비교해 보아라.