미분기하 1학기 보충연습문제

김영욱
고려대학교 이과대학 수학과

2010년

1. 다음 식으로 주어진 곡선을 z축을 축으로 회전하여 만든 곡면의 가우스 곡률은 상수임을 보여라.

$$x(u) = e^u, \quad z(u) = \int_0^u \sqrt{2 - e^{2t}}\,dt.$$

2. 함수 $z = f(x, y)$의 그래프의 가우스 곡률과 평균곡률은 다음 식으로 주어지는 것을 보여라.

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{\left(1 + f_x^2 + f_y^2\right)^2}, \quad H = \frac{\left(1 + f_y^2\right) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + \left(1 + f_x^2\right) f_{yy}}{2\left(\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\right)^3}$$

3. 곡면 $X(u, v)$의 가우스 및 평균곡률을 각각 K, H라 할 때, 곡면 $cX(u, v)(c > 0)$의 가우스 및 평균곡률은 각각 $K/c^2, H/c$임을 보여라.

4. 곡면의 각 점에서의 두 주곡률을 각각 κ_1, κ_2라 하면, 다음 식이 성립함을 보여라.

$$H^2 - K = \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2.$$

따라서 곡면 위의 점이 제점 (umbilic point)가 될 필요충분 조건은 이 점에서 $H^2 - K = 0$ 이다.

5. (a) 제점에서의 주곡률이 $\lambda \neq 0$이면 이 점에서 $N_u = -\lambda X_u$ 임을 보여라.

(b) 곡면의 모든 점이 제점이면 $N_{uv} = N_{vu}$ 임을 이용하여 주곡률 λ가 상수임을 보여라. 그리고 $\lambda \neq 0$이면 $X - (1/\lambda)N$이 상수벡터임을 보여라.

6. 곡면 위의 한 점 p에서의 접평면 위에서 (극좌표에 대하여) 각 θ방향으로의 법곡률을 $\kappa_n(\theta)$라 할 때 다음이 성립함을 보여라.

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa_n(\theta)d\theta.$$