김영욱의 미분기하 연습문제 1

고려대학교

(1) 주어진 곡면 X는 직교좌표 (u, v)에 대하여 모든 좌표곡선 $X(u_0, v)$가 속력 1인 측지선이다.

(a) 이 때 계량기가 다음과 같이 표시됨을 확인하여라:

$$E\,du^2 + dv^2$$

(b) 일반적으로 다음 공식이 성립함을 확인하여라:

$$\frac{D}{dt} fV = \frac{df}{dt} V + f \frac{D}{dt} V,$$
$$\frac{D}{dt} V \cdot W = (\frac{D}{dt} V) \cdot W + V \cdot (\frac{D}{dt} W).$$

(c) 이 때, 다음 벡터장을 가우스곡률을 써서 나타내어라.

$$\frac{D}{dv}\frac{D}{dv} X_u$$

(d) 점 $P = (u_0, v_0)$에서 X_u 방향의 단위벡터를 e_0라 할 때, 측지선 $X(u_0, v)$를 따라서 e_0를 평행하게 움직여 얻은 벡터장을 $e(v)$라 하면, $e(v) \cdot e(v) = 1$임을 보여라.

(e) 위의 결과와 $X_u = \sqrt{E} e$ 임을 써서 다음 식이 성립함을 보여라:

$$(\sqrt{E})_{vv} + K\sqrt{E} = 0.$$

(2) (a) 시간중에 내준 구면과 고깔면의 소원을 따라 평행하게 움직인 벡터장을 계산해서 두 곡면의 결과가 일치함을 확인한다.

(b) 이제 구면에서 소원을 따라 각도 parameter를 θ, 경선(모선)의 unit speed parameter를 ϕ라 하고, 고깔면에서 소원을 따라 각도 parameter를 $\tilde{\theta}$, 모선의 unit speed parameter를 *tilde*ϕ라 할 때, $\frac{D}{dt} V$를 계산하기 위하여 이 두 경우에 α''^T를 계산하여 비교하여 보고, 위의 두 경우의 답이 일치하는 이유를 extrinsic하게 설명하여라.

(c) 위와 동일한 계산에서 $\frac{D}{dt} V$를 계산하기 위하여 필요한 Γ등을 계산하여 비교하여 보고, 위의 두 경우의 답이 일치하는 이유를 intrinsic 하게 설명하여라.

(d) 위의 계산에서 두 곡면의 계산이 intrinsic하게 일치함을 알아보기 위하여 사용한 좌표의 특징을 살펴보고 이러한 좌표계가 어떤

점에서 가장 infinitesimal 한 기하를 잘 표현하는지를 설명하여라.

(e) 일반적으로 주어진 곡면에서 이러한 좌표계를 항상 잡을 수 있는가에 대하여 설명하여라.

(3) (Gauss-Bonnet의 정리 응용) $S \subset \mathbb{R}^3$가 미분가능한 compact orientable 곡면이고, 구면과 위상동형(homeomorphic)은 아니다. 이 때 S 위에는 가우스 곡률이 양수인 점, 0인 점, 그리고 음수인 점이 모두 존재함을 보여라.

(4) (Gauss-Bonnet의 정리 응용) $S \subset \mathbb{R}^3$가 구면과 위상동형인 미분가능한 곡면이라고 할 때, S 안에 놓이는 닫힌 측지선 γ가 자기 자신과 만나는 점이 없을 때, 즉 단순폐곡선일 때, γ에 의해서 두 부분으로 나뉘어진 구면 위의 두 영역에서 가우스 곡률을 각각 적분한 값은 일치함을 보여라.