김영욱의 미분기하 연습문제 1

고려대학교

1. 숙제

(1) 주어진 곡면 X는 직교좌표 (u, v)에 대하여 모든 좌표곡선 $X(u_0, v)$가 속력 1인 측지선이다.

(a) 이 때 계량기가 다음과 같이 표시됨을 확인하여라:

$$E\,du^2 + dv^2$$

(b) 일반적으로 다음 공식이 성립함을 확인하여라:

$$\frac{D}{dt} fV = \frac{df}{dt} V + f \frac{D}{dt} V,$$
$$\frac{d}{dt}(V \cdot W) = (\frac{D}{dt} V) \cdot W + V \cdot (\frac{D}{dt} W).$$

(c) 위의 좌표계에서 다음 공식을 확인하여라.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} E_u / E, \quad \Gamma^2_{11} - \frac{1}{2} E_v, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} E_v / E, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = 0,$$

(d) 이 때, 다음 벡터장을 가우스곡률을 써서 나타내어라.

$$\frac{D}{dv} \frac{D}{dv} X_u$$

(e) 점 $P = (u_0, v_0)$에서 X_u 방향의 단위벡터를 e_0라 할 때, 측지선 $X(u_0, v)$를 따라서 e_0를 평행하게 움직여 얻은 벡터장을 $e(v)$라 하면, $e(v) \cdot e(v) = 1$임을 보여라.

(f) 위의 결과와 $X_u = \sqrt{E} e$ 임을 써서 다음 식이 성립함을 보여라:

$$(\sqrt{E})_{vv} + K \sqrt{E} = 0.$$

(2) (a) 시간중에 내준 구면과 고깔면의 소원을 따라 평행하게 움직인 벡터장을 계산해서 두 곡면의 결과가 일치함을 확인한다.

(b) 이제 구면에서 소원을 따라 각도 parameter를 θ, 경선(모선)의 unit speed parameter를 ϕ라 하고, 고깔면에서 소원을 따라 각도 parameter를 $\tilde{\theta}$, 모선의 unit speed parameter를 $\tilde{\phi}$라 할 때, $\dfrac{D}{dt} V$를 계산하기 위하여 이 두 경우에 V'^T를 계산하여 비교하여 보고, 위의 두 경우의 답이 일치하는 이유를 extrinsic하게 설명하여라.

(c) 위와 동일한 계산에서 $\frac{D}{dt}V$를 계산하기 위하여 필요한 Γ등을 계산하여 비교하여 보고, 위의 두 경우의 답이 일치하는 이유를 intrinsic 하게 설명하여라.

(d) 위의 계산에서 두 곡면의 계산이 intrinsic하게 일치함을 알아보기 위하여 사용한 좌표의 특징을 살펴보고 이러한 좌표계가 어떤 점에서 가장 infinitesimal 한 기하를 잘 표현하는지를 설명하여라.

(e) 일반적으로 주어진 곡면에서 이러한 좌표계를 항상 잡을 수 있는가에 대하여 설명하여라.

(3) (Gauss-Bonnet의 정리 응용) $S \subset \mathbb{R}^3$가 미분가능한 compact orientable 곡면이고, 구면과 위상동형(homeomorphic)은 아니다. 이 때 S 위에는 가우스 곡률이 양수인 점, 0인 점, 그리고 음수인 점이 모두 존재함을 보여라.

(Hint: 위상기하에서 compact 곡면의 종수 $g \geq 0$에 따라, 곡면의 오일러 수는 $2-2g$가 됨이 알려져 있다. 또 $g = 0$인 경우는 구면뿐이다.)

(4) (Gauss-Bonnet의 정리 응용) $S \subset \mathbb{R}^3$가 구면과 위상동형인 미분가능한 곡면이라고 할 때, S 안에 놓이는 닫힌 측지선 γ가 자기 자신과 만나는 점이 없을 때, 즉 단순폐곡선일 때, γ에 의해서 두 부분으로 나뉘어진 구면 위의 두 영역에서 가우스 곡률을 각각 적분한 값은 일치함을 보여라.

(Hint: 위상기하학에서 구면과 위상동형인 곡면 위의 단순폐곡선은 이 곡면을 두 부분으로 나누며 각 부분은 원판과 위상동형이 된다.)

2. 풀이

(1) (a) 이것은 당연하다.

(b) 정의를 따라 계산하여 보면

$$(fV)'^T = (f'V)^T + (fV')^T = f'V + fV'^T$$

이므로 첫번째 식이 성립한다.

두번째 공식은

$$(V \cdot W)' = V' \cdot W + V \cdot W' = V'^T \cdot W + V \cdot W'^T$$

으로부터 바로 나온다.

(c) 책의 121쪽과 같이 계산하면 된다.

(d) 우선

$$\frac{D}{du^2}X_1 = X_{12}^T = (\Gamma_{12}^k X_k + L_{12}N)^T \Gamma_{12}^k X_k$$

이므로 이를 다시 미분하면

$$\frac{D}{du^2}\frac{D}{du^2}X_1 = (\Gamma^k_{12}X_k)^T_2 = \Gamma^k_{12,2}X_k + \Gamma^k_{12}X^T_{k2} = \Gamma^k_{12,2}X_k + \Gamma^k_{12}\Gamma^l_{k2}X_l$$

여기서

$$\Gamma^1_{12,2} + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(E_v/E)_v + \frac{1}{4}(E_v/E)^2 + 0$$
$$\Gamma^2_{12,2} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{22} = 0$$

이므로 정리하면

$$\frac{D}{dv}\frac{D}{dv}X_u = \frac{2E_{vv}E - E_v^2}{4E^2}X_u$$

이다. 한편

$$K = -(E_v/2\sqrt{E})_v \cdot \frac{1}{E} = \frac{1}{2E^2}(\frac{E_v^2}{2} - E_{vv}E)$$

이므로

$$\frac{D}{dv}\frac{D}{dv}X_u = -KX_u$$

이다.

(e) $e(v)$는 좌표곡선 $X(u_0, v)$를 따라 평행하므로 다음 식을 만족시킨다.

$$\frac{D}{dv}e(v) = 0$$

따라서

$$(e(v) \cdot e(v))' = 2e(v) \cdot \frac{D}{dv}e(v) = 0$$

이다. 즉, $e(v) \cdot e(v)$는 상수함수이다. $v = 0$일 때 이 상수는 1이므로 $e(v) \cdot e(v) \equiv 1$ 이다.

(f) 앞의 식에서

$$\frac{D}{dv}\frac{D}{dv}\sqrt{E}e(v) + K\sqrt{E}e(v) = 0$$

이 성립한다.

$$\frac{D}{dv}e(v) = 0$$

이므로

$$(\sqrt{E})_{vv}e(v) + K\sqrt{E}e(v) = 0$$

이다. 따라서

$$(\sqrt{E})_{vv} + K\sqrt{E} = 0$$

가 성립한다.

(2) (a) 구면의 좌표계 (ϕ, θ)에 대하여 계량기는

$$d\phi^2 + \sin^2\phi\, d\theta^2$$

이다. 이 회전면의 경우 Γ들의 계산은 교과서 131쪽의 공식에서 다음과 같다.

다음

이제 주어진 소원 $\phi = \pi/3$ 즉, $(\pi/3, \theta)$를 따라서 V가 평행하다는 방정식

$$\frac{D}{d\theta}V = 0$$

을 구체적으로 쓰면 다음과 갈다.

다음

이 미분방정식을 풀면 V를 구할 수 있다.

(b) 위의 계산을 고깔면의 경우에 따라가 보면 (같은 소원과 같은 법선벡터때문에)

(i) V는 두 곡면 모두에 접벡터장이며,

(ii) V'은 두 곡면에서 같으며

(iii) 따라서 V'^T도 두 곡면에서 일치한다.

(iv) 따라서 두 곡면에서 주어진 소원을 평행하게 움직이는 벡터장은 시작점에서 일치하면 전체에서 일치한다.(상미분방정식의 해의 유일성)

(c) 계량기는 조금 달라도 주어진 소원 위에서 Γ들의 값은 일치한다. 따라서 같은 벡터장 V에 대하여 $\dfrac{D}{d\theta}V$ 값이 두 곡면에서 똑같으므로 평행하다는 조건도 같은 조건이 된다. 위의 문제와 같은 이유로 두 곡면에서 평행한 벡터장은 일치한다.

(d) 이 부분은 계산을 살펴보면서 생각해 보자.

(e) 이 문제는 우리가 잡은 방법을 따라서 곡선의 부근(근방)에서는 항상 가능하다. 주어진 곡선의 각 점에서 곡선에 수직방향으로 곧은선을 그린다. 이를 사용하여 좌표를 구성한다.

(3) 힌트에서부터 $\int_S K\, dA \leq 0$ 임을 알 수 있다. 한편 $\mathbb{E}^3$ 안에 놓인 컴팩트 곡면은 항상 곡률이 양수인 점을 가진다.(왜그런가?) 따라서 이 곡면은 가우스곡률이 양수인 점과 음수인 점을 모두 가져야 한다. 이제 이 두 점을 잇는 곡선을 생각하고 중간값의 정리를 사용하면 가우스곡률이 0인 점도 이 곡면 위에 꼭 존재한다.

(4) 힌트에서 나뉘어진 영역 위에 가우스-보네의 공식을 적용한다. 이 때 경계인 닫힌 단순폐곡선인 곧은선 위에 서로 다른 세 점을 찍어 이 폐곡선이 세 점을 꼭지점으로 가지는 측지삼각형이라고 생각할 수

있다. 이제 공식에서 측지곡률의 적분은 0이고, 따라서 K의 적분은 $3\pi - \pi = 2\pi$ 임을 알 수 있다.

이러한 계산은 나뉘어진 두 영역에서 똑같이 성립한다.