미분기하학 II-00
가우스의 위대한 정리

김영욱(金英郁) 강의
양성덕(梁盛德)의 강의록

高麗大學校 數學科

2007년

정의

두 곡면 사이에 첫 번째 기본형식을 보존하는 사상이 있으면 '두 곡면은 등장적이다'고 한다.

[질문] : 가우스 곡률 K는 내재적 양(intrinsic quantity)인가?

[우리의 가설] : 그렇다.

[답] : 그렇다. (가우스가 증명했음)

가우스의 위대한 정리(Gauss' Theorema Egregium)

K는 내재적 양이다.

[증명 시작] 먼저 K의 식을 떠올리자.

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

곡면 조각이 $\vec{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$로 주어졌다고 하면

$$\begin{aligned}
\vec{X}_{11} &= \Gamma_{11}^1 \vec{X}_1 + \Gamma_{11}^2 \vec{X}_2 + L_1 \vec{N}, \\
\vec{X}_{12} &= \Gamma_{12}^1 \vec{X}_1 + \Gamma_{12}^2 \vec{X}_2 + L_2 \vec{N}, \\
\vec{X}_{22} &= \Gamma_{22}^1 \vec{X}_1 + \Gamma_{22}^2 \vec{X}_2 + L_3 \vec{N}.
\end{aligned}$$

이다.[1] 여기서 Γ_{jk}^i는 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 에서 $\mathbb{R}$로 가는 함수다. 간략하게는

$$\vec{X}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{X}_k + L_{(i+j)-1} \vec{N}.$$

[1] 이 식을 가우스의 공식(Gauss' Formula)라고 한다.

그리고, $\vec{N}_1, \vec{N}_2$는 $\vec{N}$에 수직하기 때문에

$$\begin{aligned}\vec{N}_1 &= a_{11}\vec{X}_1 + a_{12}\vec{X}_2,\\ \vec{N}_2 &= a_{21}\vec{X}_1 + a_{21}\vec{X}_2.\end{aligned}$$

자, 이제 X_{ij}와 X_k의 내적을 구해 보자.

$$\langle \vec{X}_{11}, \vec{X}_1 \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F. \tag{1}$$

여기서 $\langle \vec{X}_{11}, \vec{X}_1 \rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^1}\langle \vec{X}_1, \vec{X}_1 \rangle$ 이므로 (1)는 다음 식이 된다.

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u. \tag{2}$$

또 $\langle \vec{X}_{uu}, \vec{X}_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$인데, $F = \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle$를 u에 대해 미분하면

$$\begin{aligned} F_u &= \langle \vec{X}_{uu}, \vec{X}_v \rangle + \langle \vec{X}_u, \vec{X}_{vu} \rangle \\ &= \langle \vec{X}_{uu}, \vec{X}_v \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \rangle \end{aligned}$$

이므로 다음을 얻는다.

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v. \tag{3}$$

(2)와 (3)만을 행렬식으로 써보면,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix}.$$

따라서,

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix}.$$

[숙제] 나머지 Γ_{ij}^k를 구하여라.

나머지 6개의 Γ_{ij}^k 도 구해보면 다음과 같은 성질들을 관찰할 수 있다:

1. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \forall i, j, k.$
2. 어떤 Γ_{ij}^k도 E, F, G와 그것들의 일차 미분이 적당히 결합된 형 태로 나타내어 진다.

자, 이러한 사실에서 무엇을 얻을 수 있을 것인가?

먼저 다음에 주어진 식을 보자:

$$\vec{X}_{uuv} = \vec{X}_{uvu}, \quad \text{즉} \quad \vec{X}_{112} = \vec{X}_{121}.$$

이는 Clairut의 정리에 의해 항상 성립하는 항등식이다.
이 때, $\vec{X}_{uuv}$와 $\vec{X}_{uvu}$ 모두는 $\vec{X}_u, \vec{X}_v, \vec{N}$의 선형결합으로 쓰여지는데, $\vec{X}_u, \vec{X}_v, \vec{N}$이 $\mathbb{E}^3$의 기저를 이루므로 각 계수들이 서로 같아야 한다.

$$\vec{X}_{uuv} = (\Gamma^1_{11})_2\vec{X}_1 + (\Gamma^1_{11})\vec{X}_{12} + (\Gamma^2_{11})_2\vec{X}_2 + (\Gamma^2_{11})\vec{X}_{22} + e_2\vec{N} + e\vec{N}_2.$$

여기서 $\vec{X}_2$의 계수만을 모으면,

$$(\Gamma^2_{11})_2 + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + ea_{22}.$$

마찬가지로 $\vec{X}_{uuv}$의 $\vec{X}_v$의 계수를 구하면

$$(\Gamma^2_{12})_1 + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + fa_{21}.$$

그러므로, $ea_{22} - fa_{21}$은 Γ_{ij}^k와 그것들의 일차 미분들의 적당한 결합으로 나타내어 진다[2]:

$$ea_{22} - fa_{21} = (\Gamma_{12}^2)_1 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{11}^2)_2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2$$

자, 이제 a_{ij}의 식을 떠올려 보면 다음 식[3]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

으로부터

$$a_{22} = \frac{Ff - Eg}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{Fe - Ef}{EG - F^2}.$$

[2]이를 가우스의 방정식(Gauss' equations)라고 한다.

[3]행렬의 순서를 확인하자. 3장 4절 모양연산자의 공식.

따라서,

$$\begin{aligned} ea_{22} - fa_{21} &= \frac{eFf - eEg - fFe + fEf}{EG - F^2} \\ &= -\frac{E(eg - f^2)}{EG - F^2} \\ &= -E \cdot K. \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{E}(ea_{22} - fa_{21}) \\ &= E, F, G\text{와 } \Gamma_{ij}^k\text{와 그것들의 일차 미분들이 결합된 형태.} \end{aligned}$$

질문:

평균곡률 H는 내재적 양일까? 아닐까?

(힌트) 평면과 실린더의 ds^2과 H를 계산하여 보아라.

6장 2절에서 구의 계량기 $ds_I^2, ds_{II}^2, ds_{III}^2$을 계산하여 보았다.
이 때, K를 계산하여 보아라.

가우스의 식은, 평면 영역에 주어진 함수 E, F, G와 e, f, g가 그 평면 영역에서 공간으로 가는 어떤 곡면의 첫째, 그리고 둘째 기본형식이 될 수 있는 필요 조건으로 생각할 수도 있다.[4]

[4] 모든 편미분 방정식은 그 방정식을 더 미분해 보았을 때, 그 방정식의 solution이 만족시켜야 하는 조건을 더 얻을 수 있다. 이러한 조건을 적분조건(integrability condition)이라 부른다. 이 방정식의 해가 존재할 필요충분 조건을 찾는 것은 중요한 문제이며, 적분조건만으로는 필요충분조건이 안 될 때가 있다.

코다지-메나디 식[5]

$\vec{N}_{uv}$를 계산해 보면

$$\begin{aligned}\vec{N}_{uv} &= (a_{11}\vec{X}_u + a_{21}\vec{X}_v)_v \\ &= A_1\vec{X}_u + B_1\vec{X}_v + C_1\vec{N} \text{ for some } A_1, B_1, C_1\end{aligned}$$

N_{vu}에 대해서도 똑같이 계산하여

$$\begin{aligned}\vec{N}_{uv} &= (a_{12}\vec{X}_u + a_{22}\vec{X}_v)_u \\ &= A_2\vec{X}_u + B_2\vec{X}_v + C_2\vec{N} \text{ for some } A_2, B_2, C_2\end{aligned}$$

[5] 메나디는 “마이나(르)디”라고 읽는 것이 더 바람직하다.

$N_{uv} = N_{vu}$이어야 하므로

$$A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2, \quad C_1 = C_2$$

$A_1 = A_2$로부터

$$e_v - f_u = e\Gamma^1_{12} + f(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - g\Gamma^2_{11}$$

$B_1 = B_2$로부터

$$f_v - g_u = e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12}$$

$C_1 = C_2$는 항상 성립함. 이를 Codazzi-Mainardi equation이라 한다.

곡면론의 기본정리

Q: 평면 영역에 정의된 여섯 개 함수 E, F, G와 e, f, g를 첫째 기본 형식과 둘째 기본 형식으로 가지는 곡면이 있을까? 없을까?

[정리] 곡면론의 기본정리(Fundamental Theorem of Surface Theory): 단순 연결된 평면 영역 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$에 정의된 E, F, G, e, f, g가 다음을 만족하면 E, F, G를 첫째 기본 형식으로 e, f, g를 둘째 기본 형식으로 가지는 곡면 $\vec{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$가 있다.

1. $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$
2. 가우스의 식
3. 코다지-마이나디의 식

References

Do Carmo §4.3 p235

곡면론의 기본정리 증명 : 다음에 나와 있다.
Do. Carmo, ch 4, Appendix

[숙제] : 위의 계산을 자세히 보여라.