미분기하학 II-00
곡면의 곧은 선이란?

김영욱(金英郁) 강의
양성덕(梁盛德)의 강의록

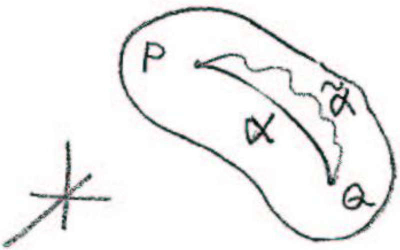
高麗大學校 數學科

2007년

'곡면속의 직선'은?

자, 계량기가 있으면 당장 곡선의 길이를 계산할 수 있다.

평면에는 서로 다른 두 점이 있으면 그 두 점을 지나는 직선이 반드시 1 개 존재한다. 한 가지 아이디어는 두 점 사이를 잇는 곡선들 중에서 가장 짧은 곡선을 두 점 사이의 '곡면 속의 직선'이라고 정의하는 것이다.

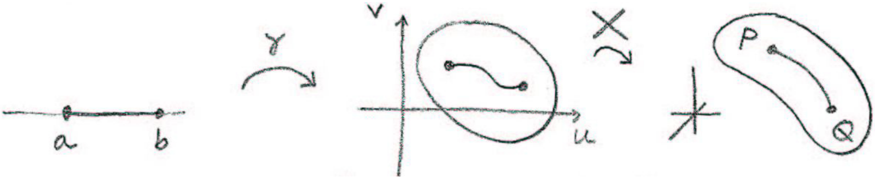


즉, P와 Q를 잇는 어떤 $\tilde{\alpha}$에 대해서도 다음이 성립하면 Γ 를 P와 Q 사이의 직선이라 한다.

$$\alpha\text{의 길이} \le \tilde{\alpha}\text{의 길이}. \tag{1}$$

이 조건이 과연 α를 어떻게 결정할까? 이는 극소 곡면이 어떻게 결정되는가와 비슷한 과정을 따른다. 이를 자세히 알아보자.

먼저 α 가 사실은 다음과 같이 주어졌다고 하자:



즉, 곡면 조각이 $\vec{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$에 의해 주어졌다고 하고 γ를 $\mathcal{U}$에 들어가는 함수로 보자. 즉, 우리가 두 점 P와 Q 사이의 직선이라 하는 α는 $\vec{X} \circ \gamma$의 이미지이다.

곡선의 variation 의 정의

자, 이제 P와 Q를 지나는 다른 직선들을 다음과 같이 나타내자.
곡선 $\gamma : [a,b] \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$의 변형[1]이란, 다음 성질을 만족하는 함수 Γ를 말한다.

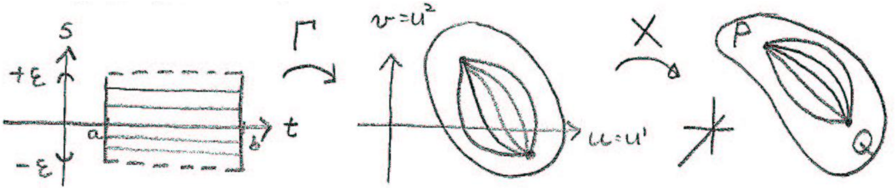
$$\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\Gamma(a,s) = \gamma(a), \quad \Gamma(b,s) = \gamma(b), \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon),$$

$$\Gamma(t,0) = \gamma(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

[1] 영어로 된 책에는 variation 이라 한다.

Γ의 정의역과 치역은 다음과 같이 그려진다.



고정된 값 $s \in (-\epsilon, \epsilon)$에 대해서 $\vec{X} \circ \Gamma(\cdot, s)$는 P와 Q를 잇는 곡면상의 곡선이 된다. 편의상 Γ의 성분을 $u^1(t,s)$와 $u^2(t,s)$로 나타내자. 즉,

$$\Gamma(t,s) = \big(u^1(t,s), u^2(t,s)\big).$$

자, 이제 $(-\epsilon, \epsilon)$에 정의된 함수 l을 생각하자:

$$l : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}, \quad l(s) := \vec{X} \circ \Gamma(\cdot, s)\text{의 길이}.$$

이 함수는 (1) 때문에 $s = 0$에서 최소값을 가진다.

미적분에 나오는 최대,최소의 정리에 의해서

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} l(s) = 0. \tag{2}$$

이 방정식은, (1)와는 달리 γ를 직접적으로 결정한다.

이를 살펴보자.

먼저 $l(s)$가 s에 대해 어떤 식으로 표현되는지를 살펴보자. 이는 우리가 알고 있는 바와 같이 다음과 같이 표현된다:

$$l(s) := \int_a^b \sqrt{E(t,s)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 2F(t,s)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + G(t,s)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}\, dt.$$

여기서 $E, F, G, (\frac{\partial u}{\partial t})^2, (\frac{\partial v}{\partial t})^2$ 모두는 t와 s의 함수이다. s가 한 숫자로 고정이 되면,이는 한 곡선$\Gamma(\cdot, s)$에 대하여 우리가 생각을 하고 있다는 말이 되고, t가 변화하면 그 곡선을 따라서 움직이고 있다는 것이다.

기호를 도입하여 식을 간편하게 써 보자.

$$u^1 := u, \quad u^2 = v,$$

$$g_{11}(u,v) = E(u,v), \quad g_{12}(u,v) = F(u,v) = g_{21}(u,v), \quad g_{22}(u,v) = G(u,v).$$

이제 $l(s)$는 다음 식과 같이 주어짐을 이해하자[2]:

$$l(s) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\Big(u^1(t,s), u^2(t,s)\Big)\frac{\partial u^i}{\partial t}\frac{\partial u^j}{\partial t}}\,dt.$$

여기서 이 식이 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$에 정의된 식만 이용하고 있음에 주목하라.

그러므로,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} l(s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}\,dt \\ &= \int_a^b \frac{\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}\Big|_{s=0}}\,dt.\end{aligned}$$

[2]아인쉬타인의 약속을 이용하였음.

이 때, 계산의 편의를 돕기 위하여 다음이 성립한다고 가정하자.

$$\left.\sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}\right|_{s=0} \equiv 1 \quad \forall t.$$

(참고 : 이 식의 기하학적 의미는 무엇인가?)
우리가 다루는 곡선은 재매개화를 통해서 이런 조건을 만족하도록 변화할 수가 있으므로 애초에 이러한 식이 성립한다 하여도 된다. 자, 이제

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right) = \left(\frac{\partial}{\partial s}g_{ij}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j + g_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial s}\dot{u}^i\right)\dot{u}^j + g_{ij}\dot{u}^i\left(\frac{\partial}{\partial s}\dot{u}^j\right)$$

그런데, g_{ij}가 대칭이어서

$$\frac{\partial}{\partial s}g_{ij} = \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial s} = g_{ij,k}\frac{\partial u^k}{\partial s},$$

$$g_{ij}\dot{u}^i\left(\frac{\partial}{\partial s}\dot{u}^j\right) = g_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial s}\dot{u}^i\right)\dot{u}^j.$$

따라서,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\right) &= g_{ij,k}\frac{\partial u^k}{\partial s}\dot{u}^i\dot{u}^j + 2g_{ij}\dot{u}^j\left(\frac{\partial}{\partial s}u^i\right)\\ &= g_{ij,k}\frac{\partial u^k}{\partial s}\dot{u}^i\dot{u}^j + \frac{\partial}{\partial t}\left[2g_{ij}\dot{u}^j\frac{\partial}{\partial s}\dot{u}^i\right]\\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t}\left(2g_{ij}\dot{u}^j\right)\frac{\partial}{\partial s}u^j.\end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned}0 = 2\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} l(s) &= \int_a^b \left[g_{ij,k}\dot{u}^i\dot{u}^j\frac{\partial u^k}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t}\left(2g_{ij}\dot{u}^j\right)\frac{\partial}{\partial s}u^i\right]dt\\ &+ \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left[2g_{ij}\dot{u}^j\frac{\partial}{\partial s}u^i\right]dt.\end{aligned}$$

<u>이 때, 두 번째 항은 사실은 0이다.</u>[3]

[3] 이유를 생각해 볼 것: $u_s^i(a) = u_x^i(b) = 0$.

그러므로 (2)는 다음이 된다.

$$0 = \int_a^b \left(g_{ij,k}\dot{u}^i\dot{u}^j - 2\frac{\partial}{\partial t} g_{kj}\dot{u}^j \right) \frac{\partial}{\partial s} u^k \, dt$$

이 때, $\frac{\partial}{\partial s}u^k$는 임의의 함수이므로, 변분법에 의해, 이 식은 다음 식을 유도한다.

$$g_{ij,k}\dot{u}^i\dot{u}^j - 2\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{kj}\dot{u}^j \right) = 0.$$

[숙제] 이 식이 유도되는 과정을 설명하여라.

이를 정리하면,

$$0 = g_{ik}\ddot{u}^i + \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})\dot{u}^i\dot{u}^j \tag{3}$$

자, 이 때 g^{mk}를 다음식에 의해 정의하자.

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$

그러면 (3)는 다음 식과 동치가 된다.

$$0 = \ddot{u}^m + \frac{1}{2}g^{mk}\left(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j \quad \text{for } m = 1, 2. \tag{4}$$

[숙제] (3)로부터 (4)을 유도하여 보아라.