현대수학입문 강의록 (3)

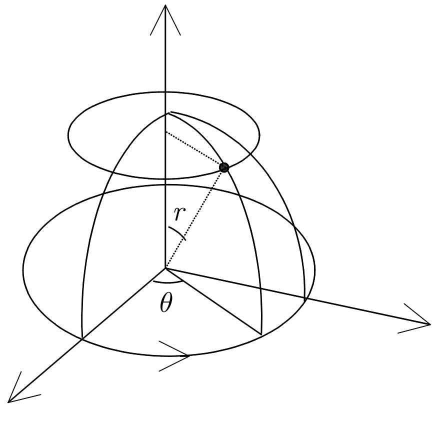
< 구면의 기하학 >

구면은 모두 닮은꼴이므로 구면의 이론은 많은 경우에 단위구면만 생각하여 보면 된다.

1. 구면 위에서 가장 기본이 되는 곡선은 대원이다. 이 대원은 구면 위에서 직선의 역할을 한다. 이것은 무슨 뜻인가? 가장 간단히 말하면 대원은 구면 위에서만 생각할 때 두 점 사이에서 최단거리를 주는 곡선이다. 이 말을 자세히 알아보자.

우선 구면 위에 두 점이 주어졌을 때, 구면 위에서 이 두 점 사이의 거리란 무엇인가? 우리가 거리를 이야기할 때는 주어진 두 점 가운데 한 점에서 출발하여 다른 점에 도달할 때 걸리는 최단 시간 또는 (단위속력으로 움직인다고 생각하고) 가장 짧은 길(道;path)의 길이를 말한다. 따라서, 구면 위에서의 두 점 사이의 거리는 구면 위를 움직여 한 점에서 다른 점으로 가는 길의 길이 가운데 가장 짧은 것의 길이를 말한다.

그러면 위에서 한 말은 구면 위에서 두 점을 잇는 길(곡선) 가운데 두 점 사이의 거리와 같은 길이를 갖는 것은 대원의 호뿐이라는 뜻이다. 이러한 사실은 어떻게 확인하여 볼 수 있는가? 미적분을 조금 사용하면 쉽게 보일 수 있다. 우선, 주어진 두 점 사이의 거리는 구면을 회전하여도 변하지 않으므로 또, 구면을 회전하여도 대원은 계속 대원임에 변함이 없으므로 (질문: 왜 이 사실이 중요한가?) 구면을 적당히 회전하여 주어진 두 점 가운데 하나가 북극에 위치하고 있다고 하고 이 경우에 대하여만 확인하여 보아도 충분하다.(스스로 납득할 수 있어야 한다. 그렇지 못할 경우에는 누구와 이야기하여서라도 자신을 납득시켜야 한다.)



미적분을 사용하려면 구면 위에 좌표가 필요하다. 구면 위의 좌표는 경도와 위도를 사용하는 것이 가장 편리하다. 오른쪽 그림에서와 같이 단위 구면 위의 북극점을 N이라고 하고 위도는 북극에서부터 재고, 경도는 한 경선을 고정한 다음 북극 위에서 내려다볼 때 시계 반대방향으로 잰다고 하자. 위도는 r로 나타내고, 경도는 θ로 나타내기로 한다.

이 구면에서 위도 및 경도 (r_0, θ_0)로 나타내어지는 점을 P라 할 때, 점 N에서 출발하여 점 P에 도달하는 미분가능한 곡선 $c(s) = (x(s), y(s), z(s))$ $(s \in [a, b])$를 생각하여 보자. 즉 $c(a) = \mathrm{N}$, $c(b) = \mathrm{P}$ 이다.

이제 이 곡선의 길이는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$c\text{의 길이} = \int_a^b \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2}\, ds$$

이제 각 점 $c(s)$의 위도와 경도를 각각 $r(s)$, $\theta(s)$라고 나타내기로 하면 다음 관계가 있다.

$$x(s) = \sin r(s) \cos\theta(s), \quad y(s) = \sin r(s) \sin\theta(s), \quad z(s) = \cos r(s)$$

이를 써서 피적분함수를 계산하여보면

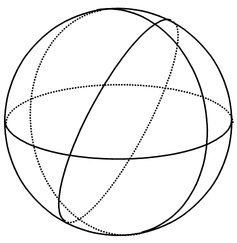
$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{(r')^2 + (\sin^2 r)(\theta')^2} \geq r'$$

가 성립한다. 따라서

$$c\text{의 길이} \geqq \int_a^b r'(s)\,ds = r(b) - r(a) = \text{점 P의 위도} = \text{호 NP의 길이}$$

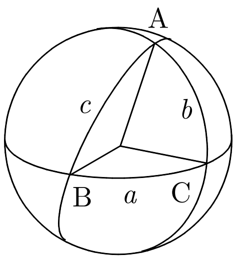
가 성립하며 이 부등식에서 등호가 성립하는 때는 $\theta' \equiv 0$일 때뿐이며 이는 c가 대원의 호 NP와 일치할 때이다. 즉 c의 길이가 가장 짧아질 때는 c의 궤적이 대원일 때뿐임을 알 수 있다.

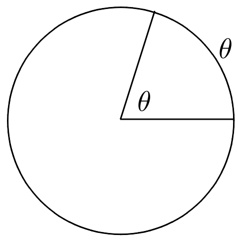
문제 1. 평면 위에서 극좌표와 위의 방법을 써서 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선은 직선임을 보여라.



2. 구면 위의 삼각형이라 하면 서로 다른 세 대원이 이루는 도형을 말한다. 오른쪽 그림과 같이 세 대원은 구면을 8개의 영역으로 나눈다. 이 8개의 영역에서 구의 중심에 대하여 마주보는 두 영역끼리는 서로 합동이다. 이 영역 가운데 하나를 구면삼각형이라 하고, 구면삼각형은 세 각과 세 변을 갖는다.

위에서 이미 보아 알 수 있듯이, 구면삼각형의 한 변을 이루는 호의 길이는 이 호가 구의 중심과 이루는 중심각의 크기와 같다. 일반적으로 구면의 호의 중심각을 호각이라고 부르며, $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$와 같이 나타낸다.



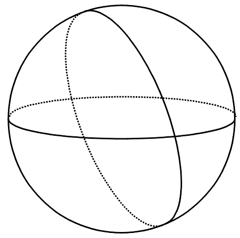


한편 구면삼각형의 한 각의 크기는 이 각을 끼고 있는 각각의 대원을 품는 두 평면이 이루는 이면각과 같다. 이 삼각형의 세 꼭지점을 각각 A, B, C라고 할 때, 세 각의 크기는 각각 $\angle$A, $\angle$B, $\angle$C 또는 A, B, C로 나타낸다.

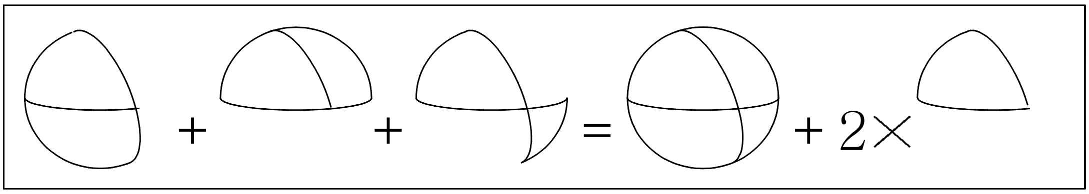
이러한 삼각형에 대하여 평면에서와 같은 여러 법칙을 찾을 수 있다.

우선 단위구면의 구면삼각형의 넓이는 다음 식을 만족한다.

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \pi + (\triangle \mathrm{ABC}\text{의 넓이})$$



문제 2. 오른쪽 그림과 같은 구면삼각형에 대하여, 다음 그림을 사용하여 위의 공식을 보여라.



3. 한편, 구면삼각형도 사인법칙과 코사인법칙을 가지고 있다. 이들의 공식만 적어보자.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad \text{(사인법칙)}$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad \text{(각에 대한 코사인 법칙)}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad \text{(변에 대한 코사인 법칙)}$$

문제 3. 비행기로 서울을 출발하여 호놀룰루에 최단거리로 도착하려면 어느 방향으로 얼마 동안 여행하여야 하는가? 아래 물음을 따라 구해보자. 지구 위에서 서울과 호놀룰루의 위치는 다음 자료를 사용한다. 지구 반지름은 6,400km로 한다.

	위도	경도
서울	북위 37.5°	동경 127°
호놀룰루	북위 21°	서경 158°

(1) 서울, 호놀룰루 및 북극을 잇는 구면삼각형을 생각하고, 이 삼각형에서 이미 알고 있는 정보를 모두 써놓는다.
(2) 코사인법칙을 써서 서울과 호놀룰루 사이의 거리를 구한다.
(3) 코사인법칙 또는 사인법칙을 써서 북극과 서울, 서울과 호놀룰루를 잇는 두 변 사이의 각의 크기를 구한다.

문제 4. 버뮤다 삼각수역은 대서양에서 플로리다의 마이애미(북위 $25°46'$, 서경 $80°12'$), 푸에르토리코의 산 후안(북위 $18°29'$, 서경 $66°08'$) 및 버뮤다 제도의 해밀턴(북위 $32°18'$, 서경 $64°47'$)을 잇는 삼각형의 수역이다. 이 수역의 넓이를 구하여라.

부록: 구면삼각형의 변에 대한 코사인 법칙의 증명

정리 [변의 코사인 법칙] 구면삼각형 $\triangle\mathrm{ABC}$의 꼭지각과 호각 사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$\cos\angle a = \cos\angle b\cos\angle c + \sin\angle b\sin\angle c\cos\angle \mathrm{A}.$$

증명. $\angle\mathrm{A} = \angle(\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}, \vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{C}})$이므로

$$(*)\qquad (\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}})\cdot(\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{C}}) = |\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}|\,|\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{C}}|\cos\angle\mathrm{A}$$

이다. 호각의 정의로부터

$$|\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}| = |\vec{\mathrm{A}}|\,|\vec{\mathrm{B}}|\sin\angle c = R^2\sin\angle c$$

$$|\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{C}}| = |\vec{\mathrm{A}}|\,|\vec{\mathrm{C}}|\sin\angle b = R^2\sin\angle b$$

이 성립한다. 이를 (*)의 우변에 대입하여 정리하면

$$(\text{우변}) = R^4\sin\angle b\sin\angle c\cos\angle\mathrm{A}$$

가 된다. 한편

$$(\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}})\cdot(\vec{\mathrm{C}}\times\vec{\mathrm{D}}) = (\vec{\mathrm{A}}\cdot\vec{\mathrm{C}})(\vec{\mathrm{B}}\cdot\vec{\mathrm{D}}) - (\vec{\mathrm{A}}\cdot\vec{\mathrm{D}})(\vec{\mathrm{B}}\cdot\vec{\mathrm{C}})$$

를 써서 좌변을 계산하면

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= (\vec{\mathrm{A}}\cdot\vec{\mathrm{A}})(\vec{\mathrm{B}}\cdot\vec{\mathrm{C}}) - (\vec{\mathrm{A}}\cdot\vec{\mathrm{C}})(\vec{\mathrm{B}}\cdot\vec{\mathrm{A}}) \\ &= |\vec{\mathrm{A}}|^2|\vec{\mathrm{B}}|\,|\vec{\mathrm{C}}|\cos\angle a - (|\vec{\mathrm{A}}|\,|\vec{\mathrm{C}}|\cos\angle b)(|\vec{\mathrm{B}}|\,|\vec{\mathrm{A}}|\cos\angle c) \\ &= R^4(\cos\angle a - \cos\angle b\cos\angle c)\end{aligned}$$

양변을 R^4으로 나누고 양변을 정리하면 정리의 공식을 얻는다.