미분기하학 II-01

김영욱(金英郁) 강의

高麗大學校 數學科

2007년

Acknowledgement

이 파일의 내용은 우리 교과서인
양성덕교수님의 2005년도 강의록이다.

이것을 만드느라 고생한 사람들의 목록:
양성덕+기하학팀(유재웅,김영욱)
홍원택, 김주연, 박배준
손동현,김정인,박규완,이태호,정창호,최재용,유상현

2002 ~ Now

벡터

평면 벡터 $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$의 크기에 대해서 생각해 보자. $\vec{v}$의 성분이 v_1과 v_2 라면, 즉 $\vec{v} = (v_1, v_2)$, 우리는 $\vec{v}$의 크기를 $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$이라고 알고 있다. 즉,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{1}$$

여기서 우리가 반드시 알아야 할 내용이 있다. "(1)은 **정리**가 아니라 **정의**다." 라는 사실이다. 즉, $\vec{v}$의 크기를 (1)의 식으로 정의한 것이며, 사실은 다른 식으로도 $\|\vec{v}\|$를 정의할 수 있다.

이를 좀 더 자세히 알아보자. 다음과 같이 평면 벡터의 크기를 생각해 보자. $\mathbb{R}^2$를 사실은 $\mathbb{R}^3$의 xy-평면으로 생각 하자. 그런데, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$의 크기를 다음 벡터 $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$의 크기로 생각하자.

$$\vec{v} = (v_1, v_2) \text{ 이면, } \vec{w} = (v_1, v_2, v_1 + v_2).$$

기하학적으로 본다면 $\vec{w}$는 평면 $z = x + y$ 속의 벡터로서 xy-평면에 정사영시켰을 때 $\vec{v}$가 되는 벡터이다.

이를 공상과학적으로 설명하면 다음과 같다. 2차원 평면에 사는 존재가 2차원 벡터의 크기를 재는데, 3차원 존재의 입장에서 본다면 그것은 곧 3차원 벡터의 크기를 재고 있는 것이다.

이렇게 길이를 재면 3차원 존재의 입장에서는 아무런 문제가 없다.

그러나 2차원 존재의 입장에서 본다면 엉뚱한 일이 많이 생긴다. 예를 들면 좌표가 $(1, 0)$인 벡터의 길이가 1이 아니라 $\sqrt{2}$가 된다.

$\mathbb{R}^2$의 존재가 느끼는 당혹감은 벡터의 길이에 대해서만이 아니라 두 벡터 간의 각도에서도 나타난다. 예를 들어 $(1,0)$과 $(0,1)$ 사이의 각도를 생각해 보자. 이는, 사실은 $(1,0,1)$과 $(0,1,1)$ 사이의 각도다. 이 둘의 내적은 $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$ 이므로 두 벡터는 수직하지 않다. 즉, $\mathbb{R}^2$의 존재에게 $(1,0)$과 $(0,1)$은 서로 수직하지 않다.
$\mathbb{R}^2$의 존재가 느끼는 당혹감의 원인은 길이와 각도를 재는 방법이 달라진 데 있다. 이를 구체적으로 어떻게 표현할까?

자, 길이와 각도는 사실은 내적에 의해서 주어진다. 즉,

$$\|v\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle},$$

$$\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\sqrt{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle}} \right).$$

자, 내적이 어떻게 변했는지 살펴 보자. 원래 $\mathbb{R}^2$의 존재가 생각하는 내적은 다음과 같다.

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

그러나 실제로 사용하고 있는 내적은

$$\langle\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle\rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + (v_1 + v_2)(w_1 + w_2).$$

이 때, 이 두 내적 중 어느 것을 사용하느냐 하는 것은 우리의 선택사항이다. 이것이, “내적은 정리가 아니라 정의다.”는 명제의 뜻이다.

자, 위의 예를 $\mathbb{R}^3$의 내적을 이용하여 $\mathbb{R}^2$의 내적을 새롭게 정의한 예다. 일반적으로는 어떻게 할까? 자, 다른 내적을 어떻게 찾을 수 있나 알아보자. 이를 위해서 내적이 만족해야 할 성질을 정리해 보자.

1. 어떤 $v \in \mathbb{R}^2$에 대해서도 $\langle v, v\rangle \geqslant 0$.
2. $\langle v, v\rangle = 0$ 이면 $v = 0$. 거꾸로, $v = 0$이면 $\langle v, v\rangle = 0$.
3. $\langle\ ,\ \rangle$는 대칭이다. 즉, $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$.
4. $\langle\ ,\ \rangle$는 각 변수에 대해 선형이다.

자, 이 네 가지 성질을 염두에 두면 $\langle\ ,\ \rangle$에 대해 다음이 얻어진다.

$\vec{v} = (v_1, v_2), \vec{w} = (w_1, w_2)$라면

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle &= \langle v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2, w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2\rangle \\ &= v_1w_1\langle\vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle + v_1w_2\langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle + v_2w_1\langle\vec{e}_2, \vec{e}_1\rangle + v_2w_2\langle\vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle & \langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle \\ \langle\vec{e}_2, \vec{e}_1\rangle & \langle\vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2}$$

이를 보면 $\langle\vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle$만 결정되면 내적이 결정됨을 알 수 있다.

자, 이 때 $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$가 만족해야 하는 성질은 무엇인가? (1), (2)에서 $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle > 0$, $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle > 0$, (3)에서 $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle$. 마지막으로 (1), (2) 에서

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle - \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle > 0. \tag{3}$$

거꾸로 $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$가 이 성질들을 만족시키면 (2)로 정의되는 $\langle\ ,\ \rangle$는 (1)~(4)를 만족시킴을 쉽게 알 수 있다.

숙제

1. (3)을 증명하여라.

자, 위의 논법에서는 $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$이라는 $\mathbb{R}^2$의 기저를 사용하였는데, $\mathbb{R}^2$의 다른 기저를 사용하면 어떻게 될까? 이는 기저가 뚜렷하게 주어지지 안는 벡터공간을 생각할 때 필요하다. 예를 들어 평면 $z = x + y$는 분명히 2차원 벡터 평면이지만 무엇이 표준기저인지는 분명하지 않다.

$\vec{f}_1, \vec{f}_2$가 $\mathbb{R}^2$의 기저라고 하자. 그러면 임의의 벡터는 $\vec{f}_1$,과 $\vec{f}_2$의 선형결합으로 나타내어 진다. 이 때, $\vec{\alpha} = \alpha_1\vec{f}_1 + \alpha_2\vec{f}_2$, $\vec{\beta} = \beta_1\vec{f}_1 + \beta_2\vec{f}_2$ 라고 하면

$$\langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle\vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle & \langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle \\ \langle\vec{e}_2, \vec{e}_1\rangle & \langle\vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix}. \tag{4}$$

이렇게 내적이 표시된다.

그런데, 이 식의 좌변은 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 그 자체로 표현이 되는 반면, 우변은 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$의 성분으로 표현이 된다. 우변을 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$의 성분이 아닌 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 그 자체로 표현하기를 원하는데 그러려면 어찌하면 좋을까? 이는 궁극적으로 양변에서 $\vec{\alpha}$와 $\vec{\beta}$를 지워버리고 $\langle\ ,\ \rangle$의 식을 표현하기 위한 것이다.

이를 위해서, 1-형식이라는 것을 도입하자. 앞에서 $\vec{f}_1, \vec{f}_2$라는 기저를 고정했는데, 이 때 $\mathbb{R}^2$에서 $\mathbb{R}$로 가는 함수 $\vec{f}_1^*, \vec{f}_2^*$를 다음과 같이 정의하자.

$$f_i^*(f_j) = \delta_{ij}.$$

여기서 δ_{ij}는 Kronecker 델타이다. 즉, $\delta_{ii} = 1$, $i \neq j$이면 $\delta_{ij} = 0$ 이다. 이러면, $f_i^*(\alpha) = \alpha_i$, $f_j^*(\beta) = \beta_j$가 된다.

따라서 (4)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \begin{pmatrix} f_1^*(\alpha) & f_2^*(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^*(\beta) \\ f_2^*(\beta) \end{pmatrix}.$$

이 때 여기서 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$를 지워버리고 다음과 같이 쓰자.

$$\langle \ , \ \rangle = \begin{pmatrix} f_1^* & f_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^* \\ f_2^* \end{pmatrix}.$$

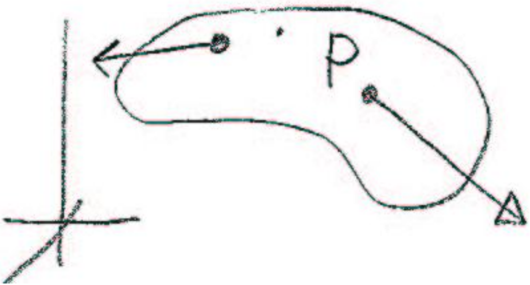
즉, 1-형식을 사용하면 내적을 좀 더 치밀하게 표현할 수 있는 것이다. 그러나, 여기에 만족하지 말고 이를 더 전개시켜 보도록 하자. 부록에서 정의된, 1-형식들 사이의 텐서곱을 이용하면

$$\langle\ ,\ \rangle = \langle f_1, f_1\rangle f_1^* \otimes f_1^* + \langle f_1, f_2\rangle f_1^* \otimes f_2^* + \langle f_2, f_1\rangle f_2^* \otimes f_1^* + \langle f_2, f_2\rangle f_2^* \otimes f_2^*.$$

미분기하를 하는 데 왜 갑자기 선형대수를? 당연히 이유가 있다. 그 이유를 알기 위해서는 우리가 하는 기하학에 벡터와 1-형식이 어떻게 연관되는지 알아야 한다.

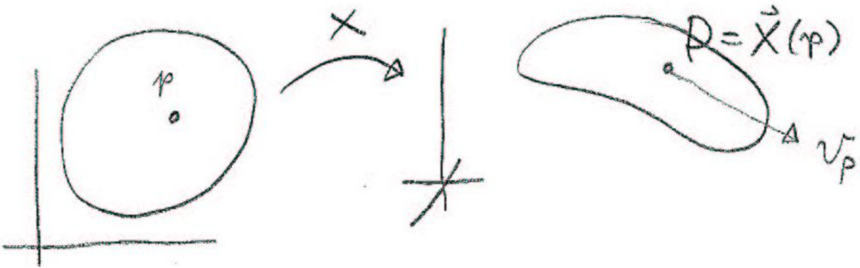
곡면론 복습

자, 곡면에 어떻게 벡터가 연관이 돼 있는가? 물론 “접벡터”가 있다.



자 이 접벡터를 U의 접벡터로는 어찌 볼 것인가?

곡면론 복습



모든 벡터 v_p는 어떤 곡선 $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \subset \mathbb{E}^3$ 의 속도벡터다. 이 때 어떤 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$ 가 있어서 $\vec{X} \circ \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$ 다. 이 때 $\vec{\gamma}'(0)$ 하고 $\alpha'(0) = v_p$를 대응시킨다. 이러면 S의 모든 접벡터를 U의 벡터로 바꿀 수 있다. 이 때, $\mathbb{E}^2$의 벡터를 바라볼 때 원점은 신경쓰지 않았지만, 우리 경우에는 벡터의 시작점이 다르면 두 벡터는 완전히 다르다. 따라서, 곡면의 점, 점마다 벡터공간이 하나씩 매달려 있다 할 수 있다. 이를 통틀어 벡터 다발(vector bundle)이라 한다.