미분기하학 II-02

김영욱(金英郁) 강의

高麗大學校 數學科

2007년

곡선 $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 또는 $\mathbb{R}^3$,

곡면 $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

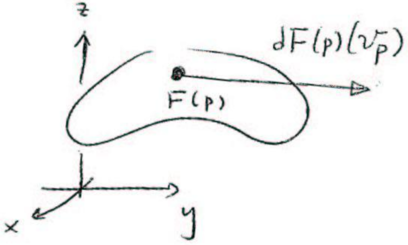
이들은 $F : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 의 특수한 형태이다. 자, 이제 F의 differential 이라 하는 dF란 존재에 대하여 알아보자. (참고 도서: Marsden & Hoffman, Elementary Classical Analysis.)

즉, 우리는 $d\gamma$, $d\vec{X}$에 대하여 알고 싶은 것이다. 더 나아가 $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 이 있으면 df란 무엇인지도 알고 싶다.

결론

각 $p \in U$에 대하여 $dF(p)$는 T_pU에서 $T_{F(p)}\mathbb{R}^n$으로 가는 다음과 같이 정의된 선형사상이다: 어떤 $\varepsilon > 0$ 과 $\vec{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ 가 있어서 $\vec{\gamma}(0) = p, \vec{\gamma}'(0) = v_p$ (즉 $\vec{\gamma}(t) = p + tv_p$로 취하면 O.K.) 이면

$$dF_p(v_p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F \circ \vec{\gamma}(t).$$



(이는 $S \subset \mathbb{E}^3$의 접벡터와 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$의 벡터를 일대일 대응시키기 위한 작업이다.)

중요

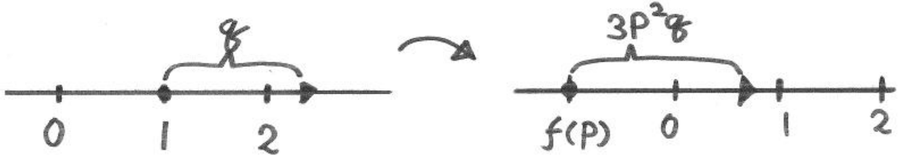
$$dF(p) : T_p U \cong \mathbb{R}^m \to T_{F(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n.$$

예

$f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

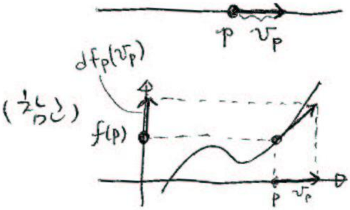
먼저 $T_p\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$, $T_f p\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$.

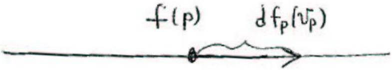
$$df_p(q) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (p + tq)^3 = 3p^2 \cdot q.$$



예

일반적으로 $df_p(v_p) = \frac{df}{dx}(p) \cdot v_p$, by the chain rule.





예

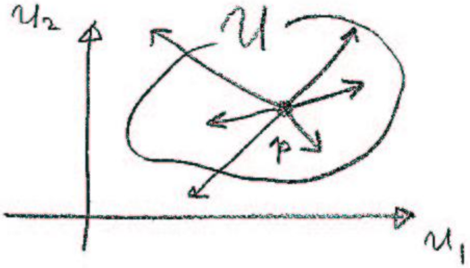
$u^i : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$이 좌표함수일 때, du^i의 의미는 무엇인가?

$du^i(v_p)$: 벡터를 숫자로 보냄.

$du^i(p)$는 T_pU에서 $\mathbb{R}$로 가는 one-form이 된다.

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 에서 dX의 의미는?

이의 응용에 가장 중요한 것은 $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 에 대해서 이다. 점 $p \in U$에 기점을 둔 벡터들의 집합을 T_pU라 하자.



자, $v_p \in T_pU$를 $d\vec{X}(p)$로 보내면 어떠한 벡터가 되는가?

이를 위해 $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, $\alpha(t) = p + tv_p$를 생각하면,

$$d\vec{X}_p(v_p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\vec{X} \circ \alpha)(t).$$

이는 곡면 $\vec{X}[U]$의 이미지에 $\vec{X}(p)$에서 접하는 벡터가 된다.

숙제 $D\vec{X}_p$는 T_pU와 $T_{\vec{X}(p)}S$ 사이의 isomorphism이 된다는 것을 보여라.

참고

이 사상의 중요성은 $T_{\vec{X}(p)}S$를 T_pU랑 동일시시켜준다는 데 있다.
특히나, 곡면의 계량기를 표현하는 데 $T_{\vec{X}(p)}S$를 이용할 수 있다.
$F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 의 differential, 즉 dF가 무엇인가에 대한 자세한 설명이 do Carmo [doC, 125~133쪽]에 나와있다.