

1. 아래 식을 증명하라.

$$\cosh a = \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \quad (1)$$

proof)

책 page190에 있는 코사인 법칙을 이용하여 증명한다.

$$\cos \alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}$$

계산을 간단히 하기 위해서

$A = \cosh \alpha, B = \cosh \beta, C = \cosh \gamma$ 라고 두자.

그러면

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c} = \frac{BC - A}{\sqrt{B^2 - 1}\sqrt{C^2 - 1}} \text{ 이고 같은 식으로} \\ \cos \beta &= \frac{AC - B}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{C^2 - 1}} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$\sin \beta$ 는

$$\cos \beta^2 + \sin \beta^2 = 1 \text{ 이므로 } \sin \beta = \frac{\sqrt{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}}{(A^2 - 1)(C^2 - 1)} \text{ 이다.}$$

$\cos \gamma$ 와 $\sin \gamma$ 도 위와 같은 식으로 구한다.

$$\cos \gamma = \frac{AB - C}{\sqrt{A^2 - 1}\sqrt{B^2 - 1}}, \quad \sin \gamma = \frac{\sqrt{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}$$

위 $\cos \alpha, \cos \beta, \sin \beta, \cos \gamma, \sin \gamma$ 값을 식 (1)에 넣어서 정리하면 A값, $\cosh \alpha$ 가 나오게 된다.

2. 교과서 page195문제10번을 푸시오.

we know that

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\sinh a}{\sinh c}, \text{ by squaring both sides, } \sin^2 \alpha = \frac{\sinh^2 a}{\sinh^2 c} \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha = \frac{\sinh^2 c - \sinh^2 a}{\sinh^2 c} \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{\sinh^2 c - \sinh^2 a}}{\sinh c} = \frac{\sqrt{(\cosh^2 c - 1) - (\cosh^2 a - 1)}}{\sinh c} = \frac{\sqrt{\cosh^2 c - \cosh^2 a}}{\sinh c} \\ &= \frac{\sqrt{\cosh^2 b \cdot \cosh^2 a - \cosh^2 a}}{\sinh c} = \frac{\sqrt{\cosh^2 a \cdot (\cosh^2 b - 1)}}{\sinh c} = \frac{\cosh a \cdot \sinh b}{\sinh c} \\ \cos \alpha &= \frac{\frac{\cosh a \cdot \sinh b}{\cosh c}}{\frac{\sinh c}{\cosh c}} = \frac{\cosh a \cdot \sinh b}{\cosh a \cdot \cosh b} = \frac{\tanh b}{\tanh c} \end{aligned}$$

3. page 194 문제 5번의 (7.11)을 증명하시오.

넓이 K 는 $K = \pi - (\alpha + \beta + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ 이기 때문에
 $\sin K = \sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)) = \cos(\alpha + \beta)$ 입니다.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

그런 다음, cosine값은 위와 같이 분리해서

각각의 sine과 cosine 값,

$\cos \alpha = \frac{\tanh b}{\tanh c}$, $\cos \beta = \frac{\tanh a}{\tanh c}$, $\sin \alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c}$, $\sin \beta = \frac{\sinh b}{\sinh c}$ 을 구해서 식 (2)에 넣어 정리하면 $\frac{\sinh a \sinh b}{\cosh a \cosh b + 1}$ 이 나오게 됩니다.