미분기하학 I-2a1
곡선의 Taylor 전개

김영욱 강의
김영욱의 강의록

高麗大學校 數學科

2008년

목표

곡선의 한 점에서 T, N, B를 좌표축으로 잡으면 곡선은 어떤 모양으로 보이는지 알아보자.

우선 circular helix를 사용하여 직접 계산하여 보자.

Helix의 경우

$\alpha(s) = (\cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2})$ 이므로 $s = 0$에서

$$T = (0, 1, 1)/\sqrt{2}$$
$$N = (-1, 0, 0)$$
$$B = (0, -1, 1)/\sqrt{2}$$

이다.
이 곡선의 곡률과 열률은 $\kappa = \tau = \frac{1}{2}$ 이다.

이것을 x, y, z 축으로 바꾸려면 행렬 (T, N, B)의 일차결합으로 어떻게 standard basis를 만들어 내는가를 알아야 한다.

즉, $(T, N, B)A = I$ 인 A를 찾으면 된다.

따라서 $A = (T, N, B)^{-1}$이다.

이제 $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ 를 원점으로 옮기자:

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha - (1, 0, 0) = (\cos(s/\sqrt{2}) - 1, \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2})$$

그리고

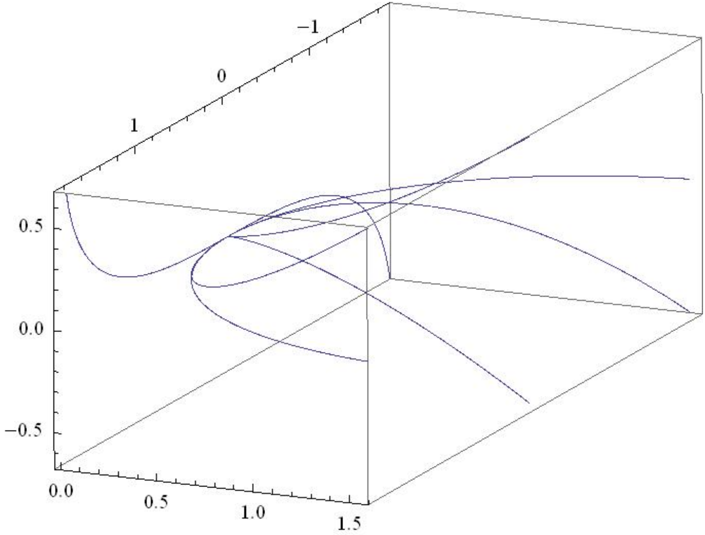
$$(TNB)\beta(s) = \bar{\alpha}(s)$$

인 β를 찾으면 되므로 $\beta = A\bar{\alpha}$ 이다.

이제 계산해 보면

$$\beta(s) \approx (s - \frac{1}{24}s^3, \frac{1}{4}s^2, \frac{1}{24}s^3)$$

이다. 이것을 그려보자.



−1
0
1
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

$\alpha(s)$는 unit speed 공간곡선. $\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$. 그러면,

$$\alpha' = T, \qquad \alpha'' = T' = \kappa N$$

$$\alpha''' = \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B) = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B$$

따라서 T, N, B를 좌표축 방향으로 잡으면
$\alpha(s) = x(s), y(s), z(s))$는 $s = 0$에서

$$
\begin{aligned}
x' &= 1, \quad y' = 0, \quad z' = 0 \\
x'' &= 0, \quad y'' = \kappa, \quad z'' = 0 \\
x''' &= -\kappa^2, \quad y''' = \kappa', \quad z''' = \kappa\tau.
\end{aligned}
$$

따라서,

$$\lim_{s\to 0}\frac{y}{x^2}=\lim\frac{y'}{2xx'}=\lim\frac{y''}{2(x')^2}=\frac{\kappa}{2},$$
$$\lim_{s\to 0}\frac{z}{x^3}=\lim\frac{z'}{3x^2x'}=\lim\frac{z''}{6x(x')^2}=\lim\frac{z'''}{6(x')^3}=\frac{\kappa\tau}{6}.$$

여기서 $x = x(s)$로 parameter를 바꾸면,

$$\alpha(x) \approx (x, \frac{\kappa}{2}x^2, \frac{\kappa\tau}{6}x^3)$$

모양이다.