미분기하학 I-2a2
Darboux의 Frenet 공식

김영욱 강의
김영욱의 강의록

高麗大學校 數學科

2008년

Frenet의 공식을 다른 모양으로 바꾸어 보자.

이 절의 내용은 19세기 말의 Darboux의 업적이다.

우리의 목표는 곡선을 따라서 움직이는 세 벡터 T, N, B의 base point(시점)을 한 점에 고정시켜 놓고 방향의 변화만을 보면 어떻게 보이나 하는 것이다.

세 벡터의 순간적인 움직임은 3차원 공간의 $\det > 0$인 직교변환이 되고 이러한 뒤집기가 가미되지 않은 직교변환은 적당한 축에 대한 회전으로 보인다. (이유를 알아낼 수 있는가?)

이 회전의 순간변화율을 알고 있다.

이 회전의 순간변화율은 다음 행렬로 표현되었다.[1]

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

이 행렬은 어느 축을 중심으로 하는 회전의 순간변화율인가?

[1] 직교변환의 순간변화율이 왜대칭변환임을 눈여겨 보아라.

이 순간변화율은 축을 변화시키지 않는다. 따라서 축 방향은

$$\ker F$$

방향이다.

이 벡터를 구하면

$$\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix}$$

이고 이 벡터는

$$R = \tau T + \kappa B$$

라고 쓸 수 있다.

이제 다음을 확인하여 보아라

$$R \times v = Fv$$

이를 사용하면

Darboux의 Frenet 공식

$$T' = R \times T$$

$$N' = R \times N$$

$$B' = R \times B$$