1. 복비로 주어지는 함수를 생각하여 보자. 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여 x의 함수

$$f(x) = [x, a, b, c] = \frac{x-b}{x-c} \Big/ \frac{a-b}{a-c}$$

를 생각하면 이 함수는 $f(a) = 1$, $f(b) = 0$, $f(c) = \infty$(이 직선의 무한원점) 라는 값을 가지는 함수이다. 이 함수는 자연스럽게 $f(\infty) = (a-c)/(a-b)$라고 생각할 수 있으므로 사영직선에서 사영직선으로 정의된 함수라고 생각할 수 있다. 이렇게 x의 일차함수의 비(ratio)로 주어지는 함수를 일반적으로 1차분수함수(linear fractional function) 또는 Möbius transformation 이라고 부른다.(상수함수가 되는 경우는 제외하기로 한다.)

이 때, 네 점 $f(x), 1, 0, \infty$의 이 순서대로의 복비는 $f(x)$임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 함수 $f(x)$는 주어진 네 점 x, a, b, c에 대하여 각각의 a, b, c가 수직선의 $1, 0, \infty$라고 가정할 때 $f(x)$가 어느 점에 있으면 두 복비 $[x, a, b, c]$와 $[f(x), 1, 0, \infty]$가 같아지는가 하는 물음의 답을 주는 함수라고 할 수 있다.

1차분수함수는 사영기하와 매우 밀접한 관계를 가지고 있다. 이를 알아보기 위해 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 위에서 정의된 1차분수함수

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

를 생각해 보자. 이 함수의 값을 수직선 위의 점을 나타내며 이 점을 사영직선의 점이라고 생각하면 동차좌표가 $(f(x), -1) \equiv (ax+b, -(cx+d))$인 점이 된다. 이 점이 수직선 위의 점 x의 상이므로 원상 x도 동차좌표로 생각해서 $(x, -1)$이라고 하면 이 함수관계는 행렬을 이용하여

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ax+b \\ -cx-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

로 나타낼 수 있다. 이 관계를 보면 1차분수함수는 동차좌표의 입장에서는 선형변환에 불과하다는 것을 이야기한다.

이제 1차분수함수 두 개를 합성하여보자. 동차좌표를 써서

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ -1 \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} g(x) \\ -1 \end{pmatrix} \equiv B \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

와 같이 나타내어지는 두 함수의 합성 $f \circ g$를 계산하면

$$\begin{pmatrix} (f \circ g)(x) \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} g(x) \\ -1 \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

이므로 이 함수는 행렬 AB로 만들어진 1차분수함수가 된다. 따라서 1차분수함수의 합성은 행렬의 곱셈(선형변환의 합성)에 해당한다. 한편 단위행렬 I로 만들어진 1차분수함수는 항등함수 id임을 알 수 있다.(항등함수는 $id(x) = x$ 로 정의되는 함수이다.) 또,

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ -1 \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

로 주어진 함수에 대하여

$$\begin{pmatrix} g(x) \\ -1 \end{pmatrix} \equiv A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

라고 정의하면 1차분수함수 g는 f의 역함수가 된다.

문제 1. 서로 다른 세 실수 a, b, c가 주어졌을 때, 1차분수함수 $f(x) = (Ax+B)/(Cx+D)$로서 $f(a) = 1$, $f(b) = 0$, $f(c) = \infty$인 것은 단 하나뿐임을 보여라. 이 사실을 써서 1차분수함수

가운데 $f(a)=a'$, $f(b)=b'$, $f(c)=c'$ (a', b', c'도 서로 다른 세 실수)을 만족하는 것도 하나뿐임을 보여라.

문제 2. 1차분수함수는 복비를 보존함을 보여라.

2. 이러한 관계를 잘 이해하기 위하여 1차분수함수들의 집합을

$$M=\left\{f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} : ad-bc\neq 0\right\}$$

라 하고 2×2 정칙(non-singular)행렬의 집합을 $Gl(2)$라고 부르기로 한다. 그러면 위에서 설명한 바에 따르면 $Gl(2)$의 행렬 하나마다 M의 원소가 하나씩 대응된다. 그 대응을 φ라고 부르기로 하자. 즉, $\varphi : Gl(2)\to M$ 이다. 그러면 위에서 알아본 성질들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(0) φ는 함수이다.

(1) $\varphi(AB)=\varphi(A)\circ\varphi(B)$

(2) $\varphi(I)=id$

(3) $\varphi(A^{-1})=\varphi(A)^{-1}$

이미 짐작하였을 것이지만 M은 함수의 합성에 관하여, 그리고 $Gl(2)$는 행렬의 곱셈에 관하여 군을 이루고 있다. 이 때 대응 φ가 하는 역할을 말로 설명하면 다음과 같다: $Gl(2)$의 원소(행렬)와 M의 원소(함수)를 φ에 의하여 대응시켰을 때,

(1) 두 행렬의 곱에 대응하는 함수는 각각의 행렬에 대응하는 함수의 합성에 대응한다.

(2) 항등행렬에 대응하는 함수는 항등함수이다.

(3) 어떤 행렬 A의 역행렬에 대응하는 함수는 A에 대응하는 함수의 역함수이다.

이러한 관계를 군 $Gl(2)$에서 군 M으로의 대응 φ가 곱셈구조를 보존한다고 이야기한다. 이렇게 두 개의 서로 다른 대상(예를 들면 군)사이에 대응(함수)을 주어서, 이 대응을 통하여 구조가 보존된다고 보일 때, 이 대응을 준동형사상(準同形寫像 ; homomorphism)이라고 부른다. 위의 예는 군의 준동형사상(group homomorphism)이다.

이제 이러한 행렬 가운데 같은 1차분수함수로 대응되는 행렬들은 어떤 것이 있는가 알아보자. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 꼴의 함수에서 계수들을 살펴보면, 이 계수들에 동시에 0이 아닌 실수배를 하여도 이 함수값에는 아무런 변동이 없음이 보인다. 따라서 $\lambda\neq 0$일 때, 두 행렬

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

는 항상 같은 1차분수함수를 정의함을 알 수 있으며, 직관적으로 생각하여 역으로 두 행렬이 같은 1차분수함수를 주려면 이러한 관계에 있지 않으면 안 된다는 것도 알 수 있다.

문제 3. 이 사실을 확인하여라. 즉, 두 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$이 정의하는 1차분수함수가 일치하면 적당한 $\lambda\neq 0$가 존재하여 $a'=\lambda a$, $\cdots$ 등이 성립함을 보여라.

이제 $Gl(2)$의 두 행렬을 잡아 보았을 때 위와 같은 관계가 있으면 그 두 행렬은 같은 것이라고 부르기로 하자. 여기서 같다는 말은 “두 행렬이 정의하는 1차분수함수가 같다”는 말로 해석하면 좋다. 그러면 이 “같다”는 말은 다음과 같은 성질을 갖는다.[1)]

(1) 어느 행렬도 자기 자신과는 “같다”.

(2) 행렬 A가 행렬 B와 “같으면”, 행렬 B는 행렬 A와 “같다”.

(3) 행렬 A가 행렬 B와 “같고”, 행렬 B가 행렬 C와 “같으면”, 행렬 A는 행렬 C와 “같다”.

이를 생각하여보면 하나의 1차분수함수로 대응되는 행렬들을 모두 묶어서 마치 하나인 것처럼, 즉, 서로 같은 것처럼, 생각할 수도 있다. 이들은 하나하나가 서로 다른 행렬이지만 1차분수함수를 공부함에 있어서는 한 묶음 안에 있는 행렬들은 모두 같은 역할을 하는 행렬들이기 때문이다.

이렇게 서로 “같은” 행렬들을 묶어서 하나로 보기로 하면 $Gl(2)$는 이러한 묶음들로 나뉘게 되고 이러한 묶음 하나하나는 M의 원소 하나씩과 1-1로 대응된다. 이러한 묶음들로 나눈 $Gl(2)$를 $Gl(2)/\sim = PGL(2)$라고 부르기로 하면 $PGL(2)$는 마치 M을 보고 있는 것과 똑 같아 보인다.

이제 $PGL(2)$의 두 묶음을 잡아 그 가운데서 한 행렬씩을 뽑아서 곱하여보면 그 결과는 그 두 묶음에 해당하는 1차분수함수의 합성함수를 정의하는 행렬 가운데 하나일 수밖에 없다. 따라서 그 두 묶음 가운데서 한 행렬씩 뽑는 방법을 어떻게 택하여도 그 곱한 결과는 같은 묶음, 즉, 합성함수에 해당하는 묶음, 안에 있는 행렬 가운데 하나여야 한다. 이 말은 두 묶음을 잡으면 행렬의 곱셈에 의하여 행렬의 곱이 들어가는 묶음이 단 하나 결정된다는 말이며, 따라서 이 곱이 들어가는 묶음을 앞의 두 묶음의 “곱”이라고 하여도 큰 무리가 없음을 알 수 있다. 즉 $PGL(2)$는 자체로 곱셈을 가지고 있다고 할 수 있다. 이 곱셈은 $Gl(2)$의 곱셈으로부터 바로 생겨나며, M의 합성과 똑같은 역할을 하는 곱셈이라는 것을 알 수 있다.

이제 $\tilde{\varphi} : PGL(2) \to M$을 이러한 대응이라고 하자. 즉, $PGL(2)$에서 행렬의 묶음을 하나 뽑아 이로부터 만들어지는 1차분수함수를 찾아내는 대응이다. 그러면 $\tilde{\varphi}$는 1-1대응이며 위의 φ가 가지고 있는 성질 (0) ~ (3)을 모두 만족시킨다. 이러한 성질을 가지는 1-1대응을 보통 두 군 사이의 동형사상(同型寫像 ; isomorphism)이라 부른다.[2)]

문제 4. 군 $\mathbb{Z}_2$는 집합 $\{0,1\}$ 위에서 2를 법으로 하는 덧셈을 셈법으로 하는 군이다. 여기서 2를 법으로 하는 덧셈이란 보통 덧셈을 하여 그 결과를 2로 나누었을 때의 나머지를 취하는 셈을 말한다. 즉, 이러한 덧셈에서는 $1+1=0$이다. 한편 유클리드 평면에서 x축에 대한 뒤집기를 T라고 하자. 그러면 T는 평면의 항등사상 $id = T \circ T$와 함께 군을 이룬다. 즉 $G = \{id, T\}$는 변환의 합성을 셈법으로 하여 군이 된다.

이 때, $\varphi : G \to \mathbb{Z}_2$를 $\varphi(id) = 0$, $\varphi(T) = 1$이라 하면 φ는 군 G에서 군 $\mathbb{Z}_2$로의 동형사상임을 보여라.

---

1) 일반적으로 이러한 성질을 갖는 관계를 동치관계라고 한다.

2) 수학의 한 가지 목표는 구조를 가지는 여러 대상들 사이의 동형관계를 알고자 하는 것이라고 말할 수 있다.