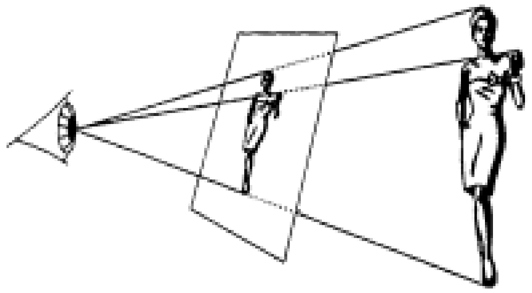
현대수학입문 강의록 (5)

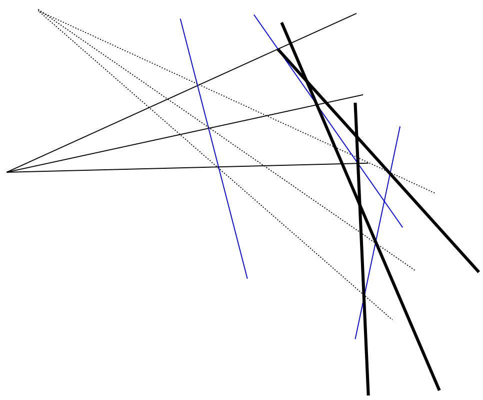
< 쌍대성(雙對性;duality) >

1. 쌍대성이란 개념을 가장 잘 보여주는 수학의 이론은 기하학이라고 할 수 있다. 이 가운데서도 사영기하학에서 이러한 개념이 가장 잘 나타난다. Klein의 입장에서 설명하면 사영기하학이란 사영변환에 대하여 변하지 않는 성질을 연구하는 기하학이라고 할 수 있다. 따라서 사영변환이 무엇인가가 중요할 것이다.

가장 간단한 사영변환에는 우리가 눈으로 물체를 볼 때 물체의 상을 사진이나 그림 또는 우리의 망막에 옮겨놓는 것이 있다. 이러한 변환의 특징은 어떠한 한 점(예를 들면 눈동자의 중심점)이 있어서, 이 점을 지나는 빛을 따라서 그림을 옮겨놓는다는 것이다.

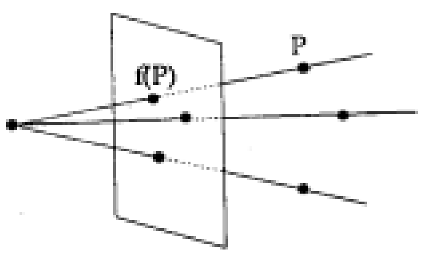


이러한 변환을 특별히 기준이 되는 점(중심점)에 대한 투시 또는 배경적 변환(perspectivity)라고 한다. 일반적으로 사영변환이란 여러 점을 기준으로 한 각각의 투시를 여러 번 거듭하여 변환한 것을 말한다. 서로 다른 두 점을 기준으로 하여 투시를 거듭하면 그 결과는 오른쪽 그림에서 보는 바와 같이 일반적으로 투시를 하여 만든 변환이 되지 않는다. 즉, 일반 사영변환은 투시보다는 복잡한 변환들이다.

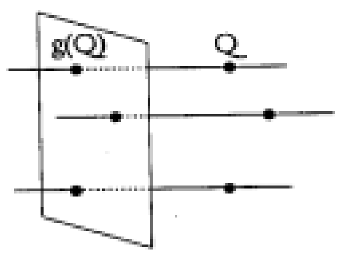


문제 1. 사영변환들이 합성에 대하여 닫혀있음을 확인하여라.

이러한 투시의 중심점을 멀리 멀리 옮겨서 무한히 멀리 하게 되면 그를 중심으로 한 투시도 극한적인 형태를 갖게 된다. 이렇게 무한히 먼 점(이런 점이 있는가?)에서 평행한 방향으로 투시하는 방법을 평행투시(parallel projection)라고 한다. 이에 반하여 중심점이 있을 때는 이를 중심투시(central projection)이라고 한다.

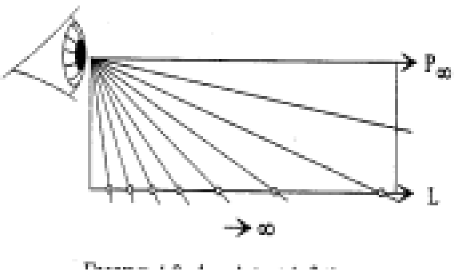


central projection

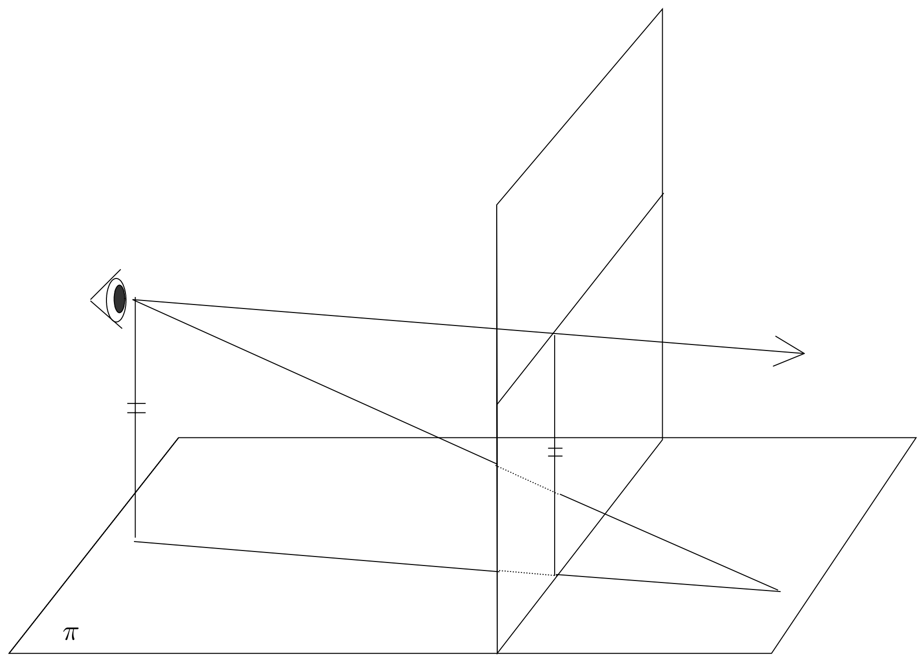


parallel projection

2. 이런 투시법에서 재미있는 것은 한 직선(또는 평면)을 다른 직선(또는 평면)으로 투시할 때, 대부분의 점들이 1대 1로 대응하지만, 가끔은 한 직선 위의 점이 다른 직선에는 대응할 곳이 없는 경우가 있다는 것이다. (아래 그림에서와 같이 눈에 보이는 땅 L의 풍경을 수직인 캔버스에 옮겨 그릴 때 땅의 무한히 먼 지점(지평선 위의 점)은 실제로 존재하지 않지만 캔버스에는 지평선으로 나타나게 된다.) 이러한 경우에 실제로 존재하지 않는 점도 존재하는 점이라고 생각하면 편할 때가 많다. 이렇게 하여 만들어진 가상적인 점을 무한원점(無限遠點; point at infinity)라고 부른다.



이와 같이 생각할 수 있는 무한원점을 모두 포함시켜 만들어진 특별한 공간을 사영공간이라고 부른다. 여기서는 간단히 사영평면을 생각하여 보자. 우리는 평면 π를 생각한다. 아래 그림에서 수직평면인 캔버스에 그려지는 지평선 위의 점들은 평면 π 위에는 존재하지 않는다. 이러한 점을 모두 평면 π에 첨가하되 한 방향을 잡으면 그 방향이나 그 반대 방향으로 양쪽의 지평선 위의 점을 같은 점이라고 생각하기로 한다.[1)]



이러한 생각은 우리가 캔버스 위에 그림을 그릴 때 우리 눈이 앞쪽만 바라보는 것이 아니라 뒤쪽도 동시에 바라보며 보이는 모두를 캔버스에 그리고 있다고 상상하는 것과 같다. 그러면 앞쪽으로 보이는 것과 정 반대 방향으로 뒤쪽에 보이는 것은 모두 캔버스의 같은 지점에 그려야 될 것이다. 무한원점도 마찬가지라고 생각하는 것이다. 이렇게 하면 평면 π 위의 점들에 더하여 사방으로 바라보이는 지평선 위의 무한히 많은 개수의 무한원점을 덧붙이게 되고, 이렇게 만들어진 점들의 집합을 사영평면(projective plane)이라고 부른다. 사영평면은 기호로 P^2라고 나타낸다.

1) 무한히 먼 점을 바라보는 방향 하나에 대하여 양쪽으로 두 개의 무한원점을 집어넣을 수도 있다. 그러나 이렇게 만들면 사영평면이라고는 부르지 않는다.

3. Des Cartes가 고안한 해석기하학은 워낙 편리하기 때문에 사영평면에도 쓸모 있는 좌표를 도입하고 싶은 것은 누구나 마찬가지이다. 그러나 얼핏 좋은 방법이 떠오르지 않는다. 사영평면은 2차원이니까 좌표를 주려면 두 개의 실수를 좌표로 써야 좋겠다는 생각이 우선 들지만, 이렇게 주어서는 편리한 좌표를 만들기 어렵다. 생각의 전환을 가져온 것은 두 개의 실수로 만들어진 좌표를 고집하지 않기로 마음을 바꾸는 것이다. 사영평면을 만들게 된 동기가 3차원 공간에서 사방을 바라보며 있는 것을 모두 그리다가 보니까 점이 더 들어가게 된 것이니까, 3차원 공간에서 쓰는 좌표를 그대로 쓰면 될 것이라는 것이 새로운 발상이다. 이렇게 만들어진 좌표를 동차좌표 또는 제차좌표(homogeneous coordinate)라고 부르는 것이다. 이를 조금 자세히 알아보는 것은 매우 중요하다.

우선 우리가 대상으로 생각하는 유클리드 평면 π는 공간에서 xy좌표평면과 평행하며 xy좌표평면보다 거리의 단위 1 만큼 아래쪽에 위치한다고 하자. 즉, 이 평면은 공간에서 방정식 $z=-1$로 나타낼 수 있다. 이 평면에 지평선 위의 무한원점들을 알맞게 집어넣어 만든 공간인 사영평면은 원점을 중심으로 하여 투시를 하여 나타나는 점을 모두 모은 것이다. 이 때, 공간의 한 점 (x,y,z)는 $z\neq 0$ 일 때 평면 π 위의 어떠한 점과 겹쳐 보이며 캔버스 위의 같은 점에 표시될까? 원점을 지나며 또 이 점 (x,y,z)를 지나는 직선의 방정식은 (tx,ty,tz)로 나타내어진다. 이러한 점 가운데 평면 π 위에 놓이는 점(이 직선이 평면 π와 만나는 점)은 $tz=-1$ 인 점이며, 따라서 $t=-1/z$ 이다. 이제 이를 써서 계산하여 보면 원점에서 바라볼 때 점 (x,y,z)와 겹쳐보이는 π 위의 점의 좌표는 $(-x/z,-y/z,-1)$ 이 된다. 즉 좌표평면으로서 π 위의 점 $(-x/z,-y/z)$와 같은 점이라고 생각되는 것이다. 이제 거꾸로 평면 π의 점 $(-x/z,-y/z)$를 공간에서 이 점에 겹치는 점들의 좌표인 (x,y,z)로 나타내려고 하는 것이다.

물론 이렇게 나타내기로 하면 한 점을 나타내는 방법은 여러 가지로 많아지게 된다. 즉 평면 π의 점 (a,b)를 나타내는 방법에는 $(a,b,-1)$도 있고, $(2a,2b,-2)$도 있으며, $(-3a,-3b,3)$도 되고, $(-a,-b,1)$도 된다. 이것은 분명히 평면에서 사용하던 좌표보다 나쁜 점이 있다. 그러나 이 방법이 좋은 점은 지평선의 점을 향하는 시선(視線) 위에도 공간의 점이 있으므로 무한원점에도 좌표를 줄 수가 있다는 것이다. 예를 들어 원점에서 벡터 $(1,1)$ 방향으로 무한히 먼 지평선 위의 점은 바라보는 시선의 방정식은 $(t,t,0)$이다. 따라서 벡터 $(1,1)$ 방향의 무한원점의 좌표를 그 시선 위의 점의 좌표를 써서 $(t,t,0)$이라고 나타낼 수 있게 된다.

문제 2. 위와 같이 정의할 때 평면 π의 무한원점이 될 필요충분조건은 그 점의 동차좌표의 z좌표가 0이 되는 것임을 확인하여라.

4. 동차좌표의 利點이 단순히 무한원점을 좌표로 나타낼 수 있는 것뿐이라면 동차좌표는 그리 대단한 것이 못된다. 동차좌표가 좋은 것은 데카르트식의 해석기하학을 할 때, 동차좌표가 생각보다 불편하지 않을 뿐만 아니라, 방정식을 사용하기에도 매우 편리하다는 것이다. 한 가지 문제를 생각하여 보자. 평면 π 위에 주어진 다음 두 직선의 교점을 구하는 문제를 생각하여 보자.

$$X+Y+1=0,\quad X-Y+1=0$$

평면 π 위에서 이 방정식이 어떻게 풀리며 어떠한 뜻을 가지고 있는가는 이미 잘 알고 있을 것이다. 중요한 것은 이 문제를 동차좌표를 이용하여 해결하려면 어떤 일이 벌어지는가이다.

우선 방정식 $X+Y+1=0$을 만족하는 점들을 동차좌표로 나타내면 어떠한 점들이 되는가를 생각하여 보자. 이러한 점 (X,Y)를 동차좌표로 나타낸 것의 하나가 (x,y,z)였다고 하자. 그러면

$$X=-x/z,\qquad Y=-y/z$$

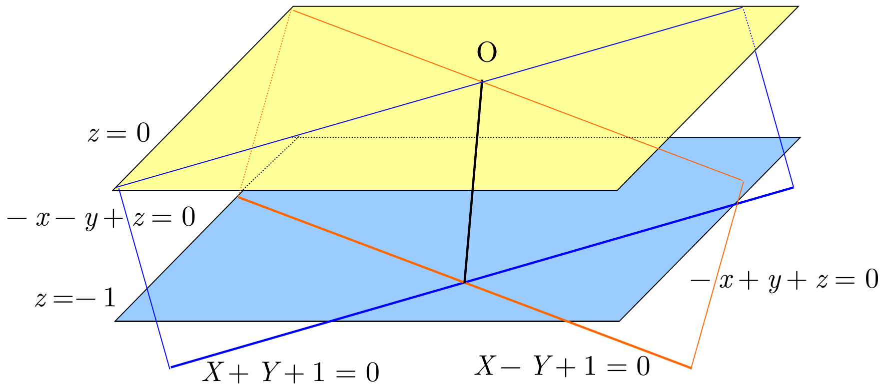
이다. 따라서 이 점은 다음 방정식을 만족하여야 한다.

$$\left(-\frac{x}{z}\right)+\left(-\frac{y}{z}\right)+1=0$$

$z\neq 0$일 때 이 방정식을 고치면

$$-x-y+z=0$$

가 된다. 그러면 평면 π 위의 직선 $X+Y+1=0$을 원점에서 바라보는 視線들 위에 놓인 점들은 이 방정식 $-x-y+z=0$을 만족하게 된다. 즉 원점과 직선 $X+Y+1=0$을 이어 만든 평면의 방정식은 $-x-y+z=0$이다. 여기서 이 평면 $-x-y+z=0$ 위의 점들 가운데 무한원점이 아닌 점($z\neq 0$인 점)을 원점에서 투시하면 모두 평면 π 위에서 직선 $X+Y+1=0$ 위로 가게 된다. 따라서 평면 π 위의 1차방정식 $X+Y+1=0$의 해 (X, Y)의 동차좌표 (x, y, z)는 다시 1차방정식 $-x-y+z=0$의 해가 되고 그 역도 성립한다.



마찬가지 방법으로 생각하면, 원점 O에서 직선 $X-Y+1=0$을 바라보는 시선들 위의 점으로 이루어진 평면의 방정식은 $(-x/z)-(-y/z)+1=0$, 즉, $-x+y+z=0$이 된다. 한편 두 직선

$$X+Y+1=0, \qquad X-Y+1=0$$

이 만나는 점을 P라 할 때, 직선 OP는 두 평면

$$-x-y+z=0, \qquad -x+y+z=0$$

이 만나는 교선을 이룬다.

따라서 두 직선의 교점을 구하는 문제는 동차좌표를 사용하여 계산하면 동차인(homogeneous) 연립1차방정식을 푸는 문제와 같으며 그렇게 구한 원점을 지나는 교선은 모두 동차좌표로 한 점 P (교점)을 나타내고 있다. 그러므로 평면 π에서 일차방정식을 다루는 문제는 삼차원 공간에서 동차좌표를 사용하여도 거의 마찬가지임을 알 수 있다.

이제 두 직선이 평행하여 교점이 없는 경우를 생각하여 보자. 예를 들면 평면 π의 두 직선

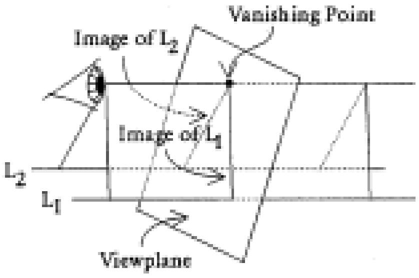
$$X+Y+1=0, \qquad X+Y=0$$

을 생각하면 이 두 직선은 평행하며 따라서 평면 위에서는 교점이 없다. 이 두 직선을 동차좌표를 써서 나타내면

$$-x-y+z=0, \qquad x+y=0$$

이 된다. 이를 풀면 $x+y=0$, $z=0$을 얻는다. 즉 공간의 직선 $(t, -t, 0)$이 그 교선이다. 이 교선은 평면 π 위에서 $X+Y=0$ 방향으로 무한히 먼 무한원점을 나타낸다. 즉 평행한 두 직선은 그 직선 방향의 무한원점에서 만난다고 생각된다. 실제로 이 두 직선을 삼차원 공간의 원점에서 바라보며 캔버스에 나타내면 지평선에서 만나는 두 직선으로 나타난다는 사실은 누구나 잘 알고 있다.(그림 참조) 이 캔버스 위의 두 직선의 교점이 바로 위에서 구한 무한원점임도 쉽게 알 수 있다.

이 점을 보통 소실점(vanishing point)이라고 부른다.



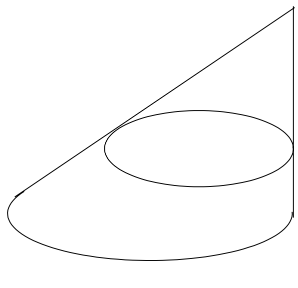
Parallel Lines have the same Vanishing Point.

5. 이제 조금 더 일반적인 경우를 생각하여 보자. 평면 π 위의 도형이 일반적으로 좌표 X, Y에 대한 다항식으로 나타난 경우에는 어떻게 될까? 예를 들어 이 도형이 원이라고 생각하고 그 방정식이

$$X^2+Y^2-2X-2Y+1=0$$

로 주어졌다고 하자. 이제 이 원 위의 점의 동차좌표를 써서 이 방정식의 조건을 쓰면

$$\left(-\frac{x}{z}\right)^2+\left(-\frac{y}{z}\right)^2-2\left(-\frac{x}{z}\right)-2\left(-\frac{y}{z}\right)+1=0$$



이 된다. 다항방정식으로 만들려면 이 식의 양변에 z^2을 곱하여 주면 된다. 즉,

$$x^2+y^2+2xz+2yz+z^2=0$$

이다. 이것이 원점 O에서 평면 π 위의 원을 바라보는 시선으로 이루어진 원뿔의 방정식이며, 주어진 원의 동차좌표에 의한 방정식이기도 하다.

재미있는 것은 이 계산 과정을 보면 어떠한 다항방정식으로 나타나는 도형도 동차좌표를 써서 나타내면 동차인 다항방정식이 된다는 사실이다. 동차인 다항식으로 만들어진 방정식을 동차방정식(homogeneous equation)이라고 부른다.

문제 3. 평면의 모든 다항방정식으로 나타나는 도형의 동차좌표에 의한 방정식은 동차방정식이 됨을 설명하여라.

이러한 사실로부터 알 수 있는 것은 평면 $\pi=\{z=-1\}$ 위에서 다항방정식을 다루는 것은 공간에서 동차방정식을 다루는 것과 다름이 없다는 사실이다. 우리는 유클리드 평면에서 다항방정식을 다룰 때는 항상 사영평면에서 동차방정식으로 바꾸어서 다루기로 한다.[2] 이렇게 함으로써 유클리드 평면의 기하학의 이론 가운데 많은 부분이 사영평면에서의 사영기하학의 일부로서 편입되게 된다.

실제로 사영평면을 생각하지 않아도 유클리드 기하학의 내용을 잘 전개할 수 있다. 그러나 이러한 사영기하학을 도입함으로써 유클리드 평면의 기하학 가운데 어떠한 성질이 사영기하학적인 성질이고 어떤 것이 사영기하학을 갖지 못하는 유클리드 기하학 만의 성질인가를 구별하여 이해할 수 있다는 장점이 있다.

2) 이러한 생각은 매우 유용하여서 사영기하학이 발전되어 이루어진 대수기하학(algebraic geometry)에서도 계속하여 쓰이고 있다.

6. 위에서 이야기한 동차좌표를 사용하여 보면 평면의 점은 세 개의 실수(공간의 벡터)를 써서 나타낼 수 있으며 이들 벡터가 서로 같은 방향이면 같은 점을 나타내는 좌표라고 이해할 수 있다. 한편 이 공간의 직선은 동차좌표를 사용하면

$$ax+by+cz=0$$

꼴의 (동차) 일차방정식으로 나타내어진다. 이 직선(또는 삼차원 공간의 평면)을 정하여 주는 정보는 이 직선의 방정식의 계수를 이루고 있는 세 실수 a, b, c가 가지고 있다. 따라서 이 세 실수를 이 직선을 나타내는 수, 즉, 이 직선의 좌표라고 볼 수 있다. 이제 이 직선을 (a,b,c)로 나타내기로 하자.

여기서 주의할 점은 위의 직선은 방정식

$$2ax+2by+2cz=0 \quad \text{또는} \quad -3ax-3by-3cz=0$$

등으로 나타내어도 된다는 사실이다. 즉 (a,b,c)가 나타내는 직선과 $(2a,2b,2c)$나 $(-3a,-3b,-3c)$가 나타내는 직선이나 모두 같은 직선이라는 것이다. 즉 직선을 나타내는 (계수)좌표는 시작부터 동차좌표가 될 운명에 있는 것이다.

고등학교 때까지는 이러한 사실이 매우 불편한 사실이었다. 직선 하나에 방정식이 하나씩 있었으면 편리하리라고 생각했던 사람들이 많았을 것이다. 그러나 사실은 직선도 점도 동차좌표와 같이 여러 개로 나타내는 방법이 있는 것이 더욱 발전된 방법이라고 생각되게 되었고, 이것이 별로 복잡한 문제를 야기하는 것도 아니라는 것을 알게 되었다.

7. 이러한 생각을 통하여 보이는 것은 대수적으로 나타내어 볼 때 점이 가지고 있는 정보(좌표)와 직선이 가지고 있는 정보(계수)가 매우 유사하다는 것이다. 사실 유사한 정도가 아니라 완전히 똑같아서 구별할 수 없어 보인다. 이 점을 놀라운 사실로 받아들이는 사람들도 있을 것이다. 점은 한 점이지만 직선은 여러 점으로 이루어져 있어서 훨씬 많은 정보를 가지고 있을 듯싶지만 실제로는 같은 양의 정보를 가지고 있는 것처럼 보인다.

더욱 재미있는 것은 한 점 (x,y,z)와 그 점을 지나는 직선 (a,b,c)는 관계식

$$ax+by+cz=0$$

를 만족한다. 그런데 이 방정식은 (a,b,c)와 (x,y,z)에 대하여 대칭인 모양을 하고 있다. 한 점이 한 직선 위에 있을 때, 즉, 한 직선이 한 점을 지날 때, 이러한 관계를 이야기하는 관계식에서 보면 두 서로 다른 개념인 점과 직선은 구별할 수 없어 보인다. 즉 이렇게 점과 직선을 동차좌표로 나타내며 보면 직선을 점이라고 생각하고 점을 직선이라고 생각해도 될 것 같다. 즉 방정식

$$ax+by+cz=0$$

에서 (a,b,c)가 계수벡터이고 (x,y,z)를 미지수라고 생각하는 것이 일반적이지만 (x,y,z)가 계수벡터이고 (a,b,c)가 미지수라고 생각하면 안 되는 이유를 찾을 수가 없다.

이제 새로운 생각으로 점과 직선을 바꾸어 이야기하여보자. 즉 직선 "l이 점 P를 지난다"는 것을 "직선 P가 점 l을 지난다"고 말하면 어떤 일이 벌어지는가? 그 말하고자 하는 뜻은 완전히 달라지지만 관계식은 변함이 없으므로 방정식과 관련된 내용은 변하지 않을 것이다.

내용을 더 자세히 살펴보자. 두 직선

$$ax+by+cz=0, \qquad a'x+b'y+c'z=0$$

의 교점으로 한 점 (x_0,y_0,z_0)를 얻었다고 하자. 이 말은 이 두 직선의 방정식을 동시에 만족하는 점의 좌표를 구하니 (x_0,y_0,z_0)가 되었다는 뜻이다. 이제 여기서 점과 직선을 바꾸어서 이야기하면 두 직선은 두 점 (a,b,c), (a',b',c')이 되고, 위의 두 직선이 나타내는 방정식은 이 두 점이 지나는 직선의 방정식

$$xa + yb + zc = 0, \qquad xa' + yb' + cz' = 0 \qquad \cdots\cdots \qquad (1)$$

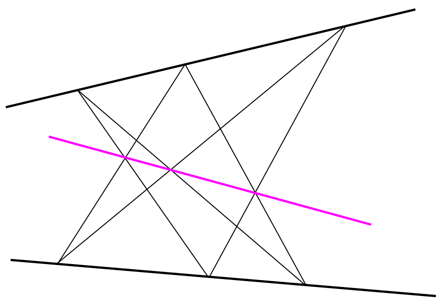
이 된다. 이러한 두 점을 지나는 두 방정식을 동시에 만족하는 (x, y, z)를 구한다는 말은 이 두 점 (a, b, c), (a', b', c')가 동시에 만족하는 방정식 (1)을 구한다는 뜻이고 이렇게 구해진 (x, y, z)는 두 점을 잇는 직선의 방정식의 계수가 되고 만다. 즉, "두 직선이 만나는 점"은 "두 점을 이은 직선"이라는 말로 바뀌게 되는 것이다.

이렇게 서로 뒤바꾸어 말하면 초등기하학에서 하는 많은 이야기들을 뒤집어서 이야기할 수 있다. 이렇게 뒤집을 때 관계식은 변함이 없으므로 원래의 이야기가 옳으면 뒤집은 이야기도 옳고, 원래가 그르면 뒤집은 것도 그르게 된다. 이러한 관계를 사영기하학에서의 쌍대성(duality)이라고 부른다.

사영기하학이 생겨난 것은 17세기의 데자르그(Desargues)와 파스칼(Pascal)에 의해서였다. 그러나 위와 같은 생각은 그보다는 꽤 나중에 생겼다고 보이며 이러한 개념이 제대로 정립된 것은 아마도 19세기 말에서 20세기 초를 넘어 들어오면서였다고 생각된다.

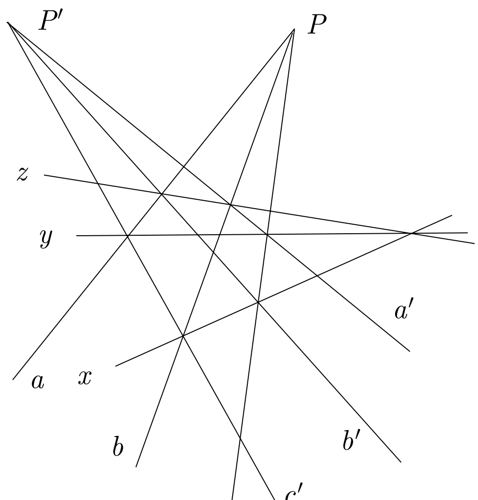
문제 4. 다음은 유명한 파푸스의 정리이다.

[파푸스의 정리] 서로 다는 두 직선 l, l' 위에 각각 서로 다른 세 점 A, B, C와 A', B', C'을 잡자. 직선 BC'과 $B'C$의 교점을 X, 직선 CA'과 $C'A$의 교점을 Y, 직선 AB'과 $A'B$의 교점을 Z라고 하면, 점 X, Y, Z는 한 직선 위에 있다.



(1) 이 정리를 쌍대형태로 쓰면 다음과 같다. 이것이 위의 정리의 쌍대정리임을 설명하여라.

[쌍대 파푸스 정리] 서로 다른 두 점 P, P'을 각각 지나는 서로 다른 세 직선 a, b, c와 a', b', c'을 잡자. 직선 b와 c'의 교점과 직선 b'과 c의 교점을 잇는 직선을 x, 직선 c와 a'의 교점과 직선 c'과 a의 교점을 잇는 직선을 y,직선 a와 b'의 교점과 직선 a'과 b의 교점을 잇는 직선을 z라고 하면, 직선 x, y, z는 한 점에서 만난다.



(2) 이제 이 쌍대정리를 다음과 같이 증명하여 보자. 우선 직선 PP'이 무한원점들의 직선이라고 가정하자. 즉 이 그림을 캔버스라고 생각하고 직선 PP'이 지평선은 이루고 있다고 생각

한다. 그러면 실제로는 직선 a, b, c는 평행하다. 또, 직선 a', b', c'도 평행하다. 이럴 때 쌍대정리가 성립함을 확인하고, 이로써 쌍대정리가 증명되었음을 설명하여라.

(3) (2)를 써서 파푸스의 정리가 증명되었다. 이제 (2)의 증명법을 그대로 (1)에다 적용하면 (2)에서 직선 PP'을 무한원점들의 직선이라고 생각하는 것은 (1)에서 보면 문제를 어떻게 바꾸어 보는 것이라고 할 수 있는가? 이렇게 하여 (1)을 직접 증명할 수 있는가?

8. 이러한 쌍대성은 20세기의 수학이 발전하는 바탕이 되었다. 기존의 기하학을 바라보는 시각은 점은 위치를 나타내고 이러한 위치를 잘 설명하기 위하여 직선을 도입한 것이라는 생각이다. 그러나 쌍대성은 입장을 바꿔서 직선을 잘 이해하려 할 때, 이를 똑같이 잘 설명해주는 것이 점이라는 관점이다. 이러한 관계를 다른 관점에서 바라보면 다음과 같이 생각할 수 있다. 평면의 점을 잘 알기 위하여 우리는 직선을 사용한다고 하였지만 실제로는 직선을 주는 식인 x, y, z의 1차함수를 사용하고 있는 것이다. 따라서 점들 (x, y, z)을 생각하게 되면 이 좌표로부터 정의되는 1차함수인

$$ax+by+cz \qquad 즉, \qquad (a, b, c)$$

를 생각한다는 생각이다. 이런 1차함수 가운데 가장 기본적인 함수는 x, y, z 이다. 이 세 함수를 일차결합(!)하여 1차함수를 모두 만들 수 있다.[3] 즉 이 세 함수는 1차함수들로 이루어진 벡터공간의 바탕벡터(basis)를 이룬다. 즉 계수가 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$인 1차함수들이 바탕벡터를 이룬다.

한편 좌표가 (x, y, z)인 벡터들은 바탕벡터 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$의 1차결합으로 모두 나타낼 수 있다. 즉 이러한 점에서 벡터 또는 점의 좌표와 그 위에 정의되어 있는 1차함수는 서로 똑같은 모양을 하고 있다. 특히 1차함수 (a, b, c)를 벡터 (x, y, z)에 적용하여 함수값

$$ax+by+cz$$

를 만들 때, 실제로 1차함수와 벡터의 역할을 구분하기 힘들다. 즉 1차함수를 중심으로 하는 관점에서 보면, 즉, 1차함수를 벡터라고 생각하면, 벡터는 거꾸로 1차함수와 같은 역할을 하고 있다고 생각된다. 즉 점이나 벡터를 잘 이해하기 위하여 1차함수를 도입하였는데, 그리고 보니까 1차함수를 잘 이해한다는 것은 벡터를 잘 이해하는 것과 같은 것이 된다.[4]

문제 6. 좌표함수 x는 벡터(점) (u, v, w)에서의 값이 x좌표인 u가 되는 함수이다. 즉,

$$x(u, v, w) = u$$

이다. 한편 벡터 $(1,0,0)$는 함수 (a, b, c) 즉, $ax+by+cz$의 값이 a가 되는 함수이다. 이 관계에서 벡터에 대한 바탕벡터 $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$와 1차함수에 대한 바탕벡터 $\{x, y, z\}$ 의 쌍대적 관계를 찾고 이를 설명하여라.

---

3) 여기서 1차함수라 함은 선형함수를 뜻한다. 0차항인 상수항이 있는(0이 아닌) 경우에는 1차함수라고 부르지 않는다. 선형대수학에서는 이러한 순수(동차) 1차함수를 선형범함수(linear functional)이라고 부른다.

4) 여기서 벡터를 잘 이해하는 것이 중요한가 1차함수를 잘 이해하는 것이 중요한가 하는 문제가 생긴다. 그러나 쌍대적 관점에서 보면 둘은 서로 다른 것이 아니다. 특히 우리가 1차함수를 써서 벡터를 이해하지도 벡터를 써서 1차함수를 이해하지도 못하고, 오히려 벡터와 1차함수의 관계만을 이해하였다고 할 수 있다.