정리 1 $\mathbb{E}^2$ *위의 isometry* φ *가* $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *를 만족하면* φ *는 직교변환이다.*

이 정리가 왜 성립하는가는 내적으로부터 거리를 만들어가는 과정이

$$\textit{내적} \longrightarrow \text{노옴(Norm)} \longrightarrow \textit{거리}$$

라는 것에서부터 이를 거꾸로 따라가며 생각해본다.

1. 우선, φ 가 거리를 보존한다는 사실로 부터 이 사상이 노옴을 보존한다는 사실을 알아보자. 노옴 $\|\mathbf{p}\|$ 는 $d(\mathbf{0}, \mathbf{p})$ 이므로,

$$\|\varphi(\mathbf{p})\| = d(\mathbf{0}, \varphi(\mathbf{p})) = d(\varphi(\mathbf{0}), \varphi(\mathbf{p})) = d(\mathbf{0}, \mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\|$$

이다. 따라서 φ 는 노옴을 보존한다.

2. 이제 노옴을 보존하는 φ 는 내적을 보존함을 보이자. 임의의 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ 에 대하여

$$-2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2$$

이다. $\|\varphi(\mathbf{p}) - \varphi(\mathbf{q})\| = d(\varphi(\mathbf{p}), \varphi(\mathbf{q})) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$ 이므로

$$\varphi(\mathbf{p})\cdot\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$$

임을 알 수 있다.(detail을 확인할 것.)

3. 마지막으로 이 사상 φ 가 선형사상임을 보이자. $\mathbf{e}_i$ 를 $\mathbb{R}^3$ 의 정규직교 basis 라고 하자. 그러면 임의의 점 $\mathbf{p}$ 는

$$\mathbf{p} = \sum p_i\,\mathbf{e}_i$$

라고 쓸 수 있다. φ 가 내적을 보존하므로 $\varphi(\mathbf{e}_i)$ 도 $\mathbb{R}^3$ 의 정규직교 basis 가 된다. 따라서

$$\varphi(\mathbf{p}) = \sum(\varphi(\mathbf{p})\cdot\varphi(\mathbf{e}_i))\;\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum(\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_i)\;\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum p_i\,\varphi(\mathbf{e}_i)$$

이다. 이를 쓰면 쉽게 φ 가 선형임을 보일 수 있다.

이제 유클리드 평면의 임의의 isometry ψ 를 생각해 보자. $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{q}$ 라 놓을 때, $\mathbf{q}$ 에 의한 평행이동사상 τ 에 대하여 합성사상 $\tau^{-1}\psi$ 를 생각하면 $\tau^{-1}\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 인 isometry이 된다. 그러므로 $\tau^{-1}\psi = \varphi$ 는 직교변환이다. 그러므로 평행이동 τ 와 직교변환 φ 에 대하여

$$\psi = \tau\,\varphi$$

꼴로 표시된다. 평면의 직교변환은 돌리기와 뒤집기 뿐이다. 특히 돌리기와 평행이동은 두번의 뒤집기이며, 일반적으로 $\mathbb{E}^2$ 의 모든 isometry는 ψ 는 세번 이내의 뒤집기를 쓰면 만들 수 있다. 일반적인 공간 $\mathbb{E}^n$ 의 isometry은 $n+1$번 이내의 뒤집기를 써서 만들 수 있음이 알려져 있다.(E. Artin 의 “Geometric Algebra” 참조.)