기하학개론 기말시험 준비

김영욱

2006년 12월

1. **2.4절:** 구면삼각형의 변에 대한 cosine 법칙.

   2.6절: 구면삼각형의 각에 대한 cosine 법칙.

   2.7절: 구면삼각형의 sine 법칙.

   이 세 절의 내용은 각각의 법칙을 실제로 삼각형을 푸는데 사용할 수 있는가 하는 것이다. 이것을 확인해 보는데 2.8절의 navigation 문제를 풀어 보여주고 있다. 그러나 이 부분은 계산에 계산기가 사용되므로 계산문제는 나오지 않는다. 이보다는 어떤 과정을 거쳐서 이런 문제를 풀 수 있는지를 설명하는 형태로 나올 수 있다.

2. **2.8절:** 구면삼각형의 쌍대삼각형.

   여기서는 쌍대삼각형의 정의를 사용할 수 있도록 잘 알아두어야 한다.(문제 2.5.1)

3. 이 밖에 각 정리의 증명에서 사용된 다음 벡터공식이 어째서 성립하는가를 알아둘 필요가 있다.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

4. **2.9절**에서는 각 지도의 특성이 어째서 성립하는가를 알아야 한다. 간단히 요약하면,

   중심투영(cental projection)에서는 대원이 모두 직선이 된다.

   원기둥투영(cylindrical proj)에서는 모든 영역의 넓이가 보존된다.

   평사도법(stereographic proj)과 Mercator proj에서는 각이 보존된다. 특히 Mercator proj은 각이 보존되도록 하기 위해서 원기둥 투영을 적절히 변형시켜 준다. 어떻게 변형시키는지 이해해야 한다.

평사도법에서는 구면의 모든 원이 평면에서는 직선 또는 원이 된다. 특히 평사도법의 투영 식을 구할 수 있어야 한다.(문제 2.9.2, 2.9.3)

5. **2.10절**의 두 가지 응용은 매우 유명한 것이다. 그 내용을 잘 익혀두는 것은 항상 유용하다.

6. 4장의 사영기하는 다음과 같은 점에 유의한다: 우선 사영평면의 개념을 잘 이해하고 이 평면을 어떻게 상상해 보면 좋을까를 생각해 둔다. 그런 다음 두 평면 사이의 투시(perspection)에 의해 어떤 그림이 어떻게 변하는가를 잘 상상할 수 있어야 한다. 이런 것은 이 과목을 수강하는 것과는 상관 없이 잘 익혀두어야 하는 것이다.

7. 위와 같이 4.1절을 잘 읽어 두었다면, **4.2절**에서 이러한 개념을 좌표로 수치화하는 방법을 익혀두어야 한다. 그래야 머리속의 그림과 이를 표현하는 좌표를 가지고 예전에 유클리드 기하를 하던 것과 같이 문제를 풀 수 있게 된다.

8. 데자르그(Desargues)의 정리와 그 증명법은 유명한 것이므로 잘 알아둔다. 데자르그의 정리의 그림을 적절히 투시하면 편리한 그림으로 바꿀 수 있다. 이렇게 해서 특수한 경우로 나타내어진 경우 데자르그의 정리는 데카르트기하로도 증명이 가능하다. 예를 들면 정리의 점 X가 무한원점인 경우(즉, 무한원점이 되도록 투시한 경우)에는 계산이 쉬워진다. 이 경우 데카르트의 좌표(해석)기하를 사용하는 방법을 알아둔다.(이것은 모두 해 볼 수는 없다. 한 경우만 해 보아도 다른 어떤 경우에도 잘 할 수 있게 된다.)

9. **4.4절**의 복비(cross ratio)는 가장 중요한 개념이다. 여기 나오는 모든 정리와 증명, 예와 연습문제를 알아야 한다. 이 밖에도 나누어 준 강의록의 문제를 풀어 두어야 한다. 예를 들면 문제 4.4.2를 풀 수 있어야 한다.

10. **4.5절**에 나오는 도형의 방정식이 투시에 의하여 어떻게 변하는가도 잘 알아야 한다. 계산하는 방법을 잘 익혀둔다. 특히 각 평면에서의 투시된 도형의 방정식들과 동차좌표에 의한 방정식의 관계를 잘 이해한다.

11. **4.6절**에서는 쌍대성과 이를 직접 사용하는 방법을 이해해야 한다. 예로서 파푸스의 정리와 이의 쌍대정리의 관계를 잘 알아야 하고, 또한 위와 같이 이런 정리들의 특별한 경우에 이 정리들을 유클리드 기하(유클리드 좌표)를 써서 증명하는 것도 할 수 있어야 한다.

12. 이와 유사한 맥락에서 동차다항식과 그 그래프(algebraic curves)를 이해하고 곡선의 쌍대곡선, 특히 이차곡선 등의 쌍대곡선을 계산할 수 있어야 한다. 파스칼(Pascal)과 브리앙숑(Brianchon)의 정리의 책의 증명은 꼭 외우고 있지 않아도 된다. 이보다는 두 정리 사이의 관계와 응용, 특수한 경우의 의미와 이 경우의 계산 등이 더 중요하다.

13. 마지막으로 특수상대성이론(special relativity)에 들어가서는 다음 행렬로 주어지는 hyperbolic rotation과 이의 성질을 알아둔다.

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

점의 궤적, 넓이를 보존하는 성질(이 행렬은 넓이를 보존한다. 그 이유는 이 행렬의 행렬식이 1이기 때문이다. 왜 행렬식이 1이면 넓이를 보존하는가?), $\tanh\theta = v$ 라고 놓았을 때 이 행렬은 v를 써서 어떻게 나타내어지는가? 이 행렬은 이차형식 $-t^2 + x^2$ 을 보존한다. 이는 무슨 뜻인가? 등등...

14. 160쪽에서부터 5쪽 정도에 걸쳐 계속되는 로렌츠변환의 유도는 모두 외울 필요는 없다. 그러나 어떤 가정에서 어떤 조건을 유도해 내는가는 알아두어야 한다. 즉,

    a) 물리학의 공간에서 모든 점의 물리적 성질이 동일함으로부터 두 inertial observer의 좌표가 각각 서로의 1차함수로 표현된다.

    b) 동시 개념을 같은 거리에 있는 두 점에서 나온 빛이 중심점에 동시에 도착하는 것으로 해석하고 한 inertial observer에게 동시인 사건 두 개가 다른 inertial observer에게도 동시라는 사실로 부터 위의 좌표관계식의 기울기를 찾는다. ($\tilde{x}$와 $\tilde{t}$축을 계산하여 두 계수를 정한다.)

    c) 빛의 속도가 두 observer에게 똑같다는 사실을 써서 다른 한 계수를 찾고,

    d) 마지막으로 주어진 자의 길이가 두 observer에게 똑 같은 길이로 느껴진다는 사실로부터 마지막 계수를 정한다.

    와 같다. 이에서 각 부분의 계산과정을 알아야 한다.

15. 위의 계산 과정에서 알아내는 것은 이러한 관계식이 서로 다른 속도로 움직이는 inertial observer에게는 시간이 어떤 관계로 보이고 즉, A는 B의 언제가 자신과 동시(同時)라고 생각하고, B는 A의 언제가

자신과 동시라고 생각하는가를 graph를 통해서 알 수 있어야 한다. 여기서 twin paradox가 paradox가 아님을 이해해야 한다.

또 위에서 계산한 바에 따라, 내가 보기에 움직이는 사람의 시계가 느리게 가는 것처럼 보이고, 움직이는 사람의 모든 길이가 짧아져 보이는 것을 손쉽게 설명할 수 있어야 한다.