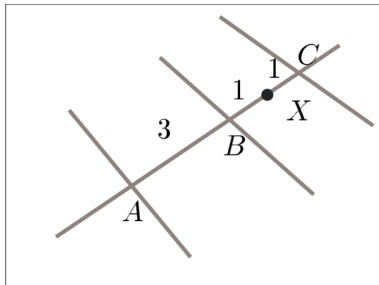


♡ 다음을 풀어라. 과정을 자세히 설명할 것.

1. 점 $O(0, 0)$, $P(0, 1)$, $Q(-1, -1)$ 를 각각 점 $O'(0, 1)$, $P'(1, 1)$, $Q'(2, 2)$ 으로 보내는 isometry를 ψ 라 하자.
 - (a) ψ 를 좌표 (x, y) 의 함수로 나타내어라.
 - (b) 평면의 점을 복소수 z 라고 나타낼 때, ψ 를 z 의 식으로 나타내어라.
2. ψ 를 2개 또는 3개의 뒤집기로 나타냈을 때 이 두(세) 뒤집기를 구체적으로 describe 하여라.
3. 점 $O(0, 0)$ 를 고정시키고, 점 $P(\sqrt{2}, -1)$ 를 점 $P'(\sqrt{2}, 1)$ 으로 보내는 Minkowski isometry (Minkowski 내적을 보존하는 변환)를 ψ 라 하자. $\psi(1, 0)$ 를 구하여라.
4. 만일 평면 위의 벡터 (x, y) 에 대하여 함수 $\varphi(x, y) = xy$ 의 절대값을 Minkowski 식의 norm^2 으로 사용한다면, 이 때의 Minkowski 식의 내적은 어떻게 표현되겠는가?
5. 3차원 공간의 orthogonal transformation은 항상 어떤 한 직선방향을 고정함을 설명하여라.
6. 평면의 두점 $P(1, 1)$ 와 $Q(1, 2)$ 를 잇는 미분가능한 곡선 가운데 길이가 가장 짧은 곡선을 찾고 그 이유를 설명하여라.

♡ 다음을 풀어라. 과정을 자세히 설명할 것.

1. 단위구면 위의 구면삼각형이 $\angle A = \pi/2$ 이고, $\angle b = \angle c$ 인 직각이등변 삼각형이라고 하자. 변각 $\angle a \geq \pi/3$ 일 때, $\angle b$ 의 범위를 구하여라. 이때, 이 삼각형의 쌍대삼각형의 넓이의 최대/최소값을 구하여라.
2. S 는 원점을 중심으로 하는 단위구면이고 f 는 S 에서 xy 좌표평면 H 로 정의된 stereographic projection이다. f 를 공간좌표 (x, y, z) 의 함수로 표시하여라.
3. 각각의 직선 l, l' 위의 세 점 A, B, C 및 A', B', C' 에 대한 Pappus의 정리에서, 항상 직선 l 을 무한원직선이라고 가정할 수 있다. l' 이 x 축이고 l 이 무한원직선일 때, Pappus의 정리는 어떤 꼴인지 쓰고, 이 정리를 좌표기하를 사용하여 증명하여라.
4. 다음 사진에는 100m 간격으로 세 개의 교차로가 있다. 교차로 A에서 출발한 사람 X가 정확히 출발 2분 후에 찍힌 사진에서 보면 $AB = 3\text{cm}$, $BX = XC = 1\text{cm}$ 였다. 이 사람은 2분 동안에 얼마의 거리를 갔는가?



5. (a) 공간에서 평면 $z = -1$ 위의 곡선 $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ 을 원점을 중심으로 투시하여, 평면 $y = -1$ 에 상(像)으로 생긴 곡선의 방정식을 구하여라
 (b) (a)에서 구한 곡선의 쌍대곡선의 방정식과 이의 동차방정식을 구하여라.
6. 쌍둥이 A, B 가운데 A가 B를 떠나 $\frac{24}{25}c$ 의 속력으로 7년동안 멀어져간 다음 그 자리에서 되돌아서 다시 $\frac{24}{25}c$ 의 속력으로 B를 향하여 돌아왔다. A가 여행한 14년 동안에 B의 시간은 50년이 흘렀음을 특수상대성이론에 의해 알 수 있다. B의 좌표계에 A가 여행한 worldline을 그리고 B가 여행한지 5년 후 및 10년 후에 B가 동시라고 생각하는 A의 시간상의 위치를 계산하고 표시하여라.