翼算 역자 서문

上篇 正負論

『익산』翼算의 저자 이상혁李尙爀은 조선시대에 가장 뛰어난 산학자라고 할 수 있다. 『한국과학기술자료대계』韓國科學技術資料大系 수학편數學編에 들어 있는 모든 산서算書와 비교하여, 저자만큼 수학을 철저하게 구조적으로 접근한 학자는 없는 것으로 보인다. 상당히 많은 저자가 여러 자료를 인용하면서 그 내용을 제대로 이해하지 못하고 있는 경우가 나타나는데, 이상혁은 선대先代의 산서를 철저하게 이해한 후에 그에 대한 이론을 전개, 발전시키고 있다.

그는 조선시대의 유명한 산학자 집안에서 1810년에 태어났다. 그의 8대조 이적李迪(1582~?)부터 시작하여 12대에 걸쳐 대대로 64명의 주학 입격자를 내고, 또 그의 아버지 이병철李秉喆(1782~?)은 『구일집』九一集의 저자 홍정하洪正夏(1684~?)의 조카인 산학자 홍이록洪履祿(1749 ~?)의 사위이다. 이상혁은 이병철과 그의 후처인 변중관卞重觀의 딸 사이에 태어났지만, 홍정하의 집안에 내려오는 산서를 쉽게 접할 수 있었을 것으로 추정된다. 그는 1832년 주학시험에 합격하고, 6품인 별제別提를 지냈다.

그는 『차근방몽구』借根方蒙求(1854)와 『산술관견』算術管見(1855)에 이어 『익산』翼算을 1868년에 출판한다.
『차근방몽구』와 『산술관견』은 중국에서 사용된 서양 수학에 대한 해설서인데 반하여, 『익산』은 이상혁이 『사원옥감』(1303)을 연구한 후 자신의 이론으로 확대 발전시킨 방정식론과 유한급수론을 전개하는 논저로, 전통적인 중국 수학과 서양 수학을 비교하여 서양 수학을 공격한다.

마테오 리치(M. Ricci = 리마두利瑪竇, 1552~1610)가 명말 1582년 중국에 들어와서 서양 수학을 전파하기 시작한다. 리치는 서광계徐光啓(1562~1633)와 함께 유클리드의 『기하학원론』을 6권까지 번역하고, 이지조李之藻(1565~1630)와 함께 그의 스승인 클라비우스(P. C. Clavius, 1537~1612)의 저서 『Epitome Arithmeticae Practicae』(1585)를 번역하여 『동문산지』同文算指(1614)를 출판했다. 그밖에 많은 신부가 중국에 들어와 서양 수학과 함께 역법이 전달되는데, 이들은 그 당시까지 있던 중국의 역법보다 훨씬 정확하여 서양 수학이 중국 수학을 능가하는 것처럼 인식되었다. 또 매문정梅文鼎(1633~1721)은 중국 수학과 서양 수학을 접목시키는 데 성공하였다. 그러나 그는 서양 수학에 비하여 중국 수학 특히 송·원대의 훌륭한 업적을 충분히 이해하지 못하고 있었다. 또, 청의 제2대 황제인 강희康熙(1654~1722)는 진후요陳厚耀(1648~1722), 매문정의 손자인 매각성梅瑴成(1681~1763), 명안도明安

圖 (?~1764), 하국종何國宗 (?~1766), 하국동何國棟 형제 등에 명하여 『율력연원』律曆淵源을 짓게 하는데, 이는 『역상고성』曆象考成 42권, 『율여정의』律呂正義 5권과 『수리정온』數理精蘊 53권 등 모두 100권으로 1723년(옹정원년雍正元年)에 출판되었다. 이 중에 『수리정온』은 그 당시의 중국 수학과 서양 수학을 거의 망라하는 대작이었다. 그러나 옹정은 곧 쇄국정책으로 돌아서서 더 이상 서양 수학이 중국에서 발전할 수 없게 되고 이는 아편전쟁 (1840)이 일어날 때까지 계속되었다. 그 사이 청에서는 중국 수학사상 가장 훌륭한 업적을 낸 송·원대의 수학을 다시 이해하기 시작하고, 이들에 대한 연구가 활발하게 진행되었다.

그 중에 가장 중요한 변화는 명대明代에 잊혀졌던 이야李冶의 『측원해경』 (1248)과 『익고연단』 (1259), 주세걸朱世傑의 『산학계몽』 (1299)과 『사원옥감』 (1303)이 다시 연구되기 시작한 것이다. 이들은 천원술, 더 나아가서 사원술을 써서 다항식을 정확히 나타내어 다항식의 연산을 쉽게 계산하고, 이를 통하여 방정식을 구성하고 다원 방정식을 1원 방정식으로 변환할 수 있게 된다. 1원 방정식의 풀이는 가헌賈憲이 시작하고, 진구소가 『수서구장』에서 확립한 증승개방법을 통하여 완전히 정리하였다. 이예李鋭는 『측원해경』을 복교覆校하여 1797년에 출판하는데, 그는 발문跋文에서 "天元如積之學 盛於元 亡於明 而復顯於本朝"라고 하였다. 실제로 천원술은 『수리정온』에서 차근방술로 나타나 있는데, 매각성이 그의 『적수유진』赤水遺珍 (1761)에서 차근방술과 천원술이 같다는 것을 말하고 명대에 이들이 잊혀지게 한 당순지唐順之 (1507~1560)와 고응상顧應祥 (1483~1565)을 공격한다. 또 『산학계몽』과 『사원옥감』도 나사림 (1784~1853) 이 1839년과 1835년에 세초를 달아 각각 출판함으로 다시 이들을 연구하게 되었다. 또 『측원해경』, 『사원옥감』의 방정식에 대한 결과들은 18세기 이전의 서양 수학보다 월등히 앞선 부분이 들어 있어서, 그 당시 정치적인 측면과 함께 이들에 관한 연구를 할 수 있는 자료가 되었다. 또 서양 수학이 끼친 영향으로 정의부터 시작하여 개념을 정립하고 이에 중국 산학의 방법론을 연구하므로 새로운 전기를 준 것은 틀림없다. 물론 지나친 국수주의 때문에 18세기 이후의 서양 수학의 급속한 발전을 외면하여 중국 수학이 19세기 후반 이후의 발전에 기여를 못하고 그들의 결과가 20세기에 들어와 단절되게 되었지만, 송·원대의 중국 수학은 그 당시 세계의 어떤 수학보다 앞서 있었던 것은 틀림없다.

『산학계몽』은 조선에서 양휘의 『양휘산법』 (1274~1275)과 함께 사용되고 있어서, 중국과 달리 천원술은 그 명맥이 계속하여 유지되었는데, 『사원옥감』과 『측원해경』은 모두 19세기에 청에서 다시 들여와 연구하였다.

저자 이상혁은 중인이지만, 남병철 (1817~1863), 남병길 (1820~1869) 형제와의 깊은 교류를 통하여 그의 수학을 발전시킬 수 있었다. 남병철은 『해경세초해』 (1861), 남병길은 『집고연단』, 『측량도해』 (1858), 『유씨구고술요도해』, 『무이해』 (1855), 구장술해, 『산학정의』 (1867) 등의 저서를 내었는데, 이때 이들은 『익고연단』, 『측원해경』, 『사원옥감』을 함께 연구한 것으로 보인다. 양반인 이들 형제들은 많은 자료를 구할 수 있었고 이를 이상혁과 공유하였다. 이상혁은 『익산』에서 이들 세 권의 책을

철저하게 연구했다는 사실이 나타나고 있다. 그는 『수리정온』과 『적수유진』을 연구하여 서양 수학, 특히 차근방술과 삼각법에 대한 연구를 하여 위에 언급한 두 권의 책을 출판하였다. 그러나 1863년 고종이 12세에 즉위하면서 대원군의 쇄국정책이 시작되었다. 따라서 청에서와 같이 조선에도 다시 서양 수학보다 전통적인 수학을 연구할 수밖에 없었고, 이 때 『측원해경』과 『사원옥감』이 들어와 중국에서 옹정 이후의 현상과 같은 일이 되풀이되었다.

그러나 저자 이상혁은 『수리정온』을 포함하여 서양 수학을 연구하였기 때문에 수학의 개념화에 대한 준비가 충분히 이루어진 상태에서 얻어낸 결과들이 『익산』에 잘 나타나 있다.

상편의 정부론은 방정식론이다. 실제로 하편의 퇴타술도 방정식론의 일환으로 보아야 한다. 『사원옥감』 이전의 산서에서는 유한급수의 합을 구하는 문제와 합을 알고 항의 수를 구하는 문제를 다루었는데, 이 경우 모두가 3차 이하의 방정식이었다. 그러나 주세걸은 유한급수의 합이 항의 수 $(=n)$에 관하여 4차 이상이 나오는 경우를 얼마든지 만들어 낼 수 있음을 보이고 이를 이용하여 고차방정식을 구성하였다. 중국의 산학은 모두 기하적인 현상을 나타내는 것으로 출발하기 때문에 4차 이상의 현상에 대한 거부감이 크고, 또 실제로 4차 이상의 방정식은 모두 무리방정식이나 분수방정식에서 유도되는 것이었다. 그러나 유한급수는 얼마든지 현상에서 이해할 수 있는 내용이므로 고차방정식을 이해하는 데 크게 도움이 되었을 것으로 추정된다.

『수리정온』에 나타나는 차근방술의 연구를 통하여 그 이전까지 구별하지 못하였던 다항식과 방정식을 등식의 개념을 가지고 구별할 수 있게 되었다. 서양 수학에서도 방정식을 $p(x)=0$의 형태로 정립한 사람은 데카르트(R. Descartes, $1596\sim1650$)이다. 동양 산학에서는 항상 현상을 나타내는 것으로 방정식을 이해하고 있어서 $p(x)=c\ \ (0<c)$의 형태를 취급하는데, 이를 풀 때 증승개방법, 즉 조립제법을 사용하려면 결국은 $p(x)-c=0$의 형태로 변환하여야 하는데 『수서구장』이래 이를 정확하게 나타내지 못하고 이로 인하여 여러 가지 혼동이 일어나게 된다.

저자는 이를 정부상당식, 즉 $p(x)=0$의 형태로 모두 바꾸어 방정식의 이론을 통일하려고 시도하고 있다. 특히 연립 1차방정식의 경우까지 정부상당식으로 변형시켜야 한다고 주장하므로 『구장산술』이래 현재까지 사용하고 있는 확대계수행렬의 상수항 부분이 부호가 바뀌게 되었다.

또 동양 수학에서 방정식의 해는 양의 근만을 취급하므로 방정식의 해를 양의 계수를 가지는 항들에 근을 대입시킨 결과와 음의 계수를 가지는 항들에 대입시킨 결과가 같아지는, 즉 정부正負 상당相當으로 방정식을 접근하고 있으므로 근사해의 경우는 이 이론으로 해석이 되지 않게 된다. 방정식의 개념을 정부상당식으로 정립

하고, 특히 『사원옥감』에서 다원 고차방정식으로부터 일원 방정식을 유도하는 과정에 등식의 여러 성질을 이용하는데, 이를 모두 정부正負의 이론으로 해석하려고 하고 있다. 또 일원 방정식의 풀이는 증승개방법을 사용하는데 이 때 나타나는 연산은 모두 곱셈과 덧셈인데 이를 각 항마다 정부正負를 따져가면서 설명하는 것은 이해하기가 어렵다.

서양 수학을 중국에 널리 알린 매문정과 『수리정온』의 차근방술에 대한 공격은 지나칠 정도이다.

저자 이상혁이 사용한 중요한 등식의 성질은 다음과 같다. 먼저 동양 수학에서 뺄셈과 나눗셈은 현재 우리가 사용하는 역원의 덧셈, 곱셈으로 이해하지 않고 별개의 연산으로 이해하고 있으므로 이들에 대하여도 따로 해설하고 있다.

현재 우리가 사용하고 있는 등식의 성질, 즉 $A=B$와 $A+C=B+C$, $A-C=B-C$, $AC=BC$ $(C\neq0)$, $\dfrac{A}{C}=\dfrac{B}{C}$ $(C\neq0)$가 동치라는 사실과 함께, $A+B=0 \Rightarrow A^2-B^2=0$을 사용하고 있다. 또 이원연립방정식 $\begin{cases} A_1(x)+B_1(x)y=0 \\ A_2(x)+B_2(x)y=0 \end{cases}$ 에서 두 식을 천·지 이원술로 나타내어 나란히 늘어놓으면 $B_1(x)$, $A_2(x)$는 외2행外二行에 나타나고, $A_1(x)$, $B_2(x)$는 내2행內二行으로 나타나 내2행을 곱한 것에서 외2행을 곱한 것을 빼면 y가 소거된 방정식 $A_1(x)B_2(x)-A_2(x)B_1(x)=0$을 얻는다. 이 방법을 『사원옥감』에서 호은통분互隱通分이라 하는데 이 역시 『익산』에서 많이 사용하고 있다.

앞에서 설명한 대로 증승개방법에서 나타나는 곱셈과 덧셈을 제대로 이해하지 못하여 그 결과가 예상했던 대로 나오지 않는 것에 대하여 중국 수학은 이를 극복하고 있는데, 조선 산학에서 그렇지 못하여 많은 저자가 이를 언급하고 있다. 이 경우 나타나는 번적과 익적에 대하여 이상혁은 2차방정식의 경우에 이 두 경우가 일어날 수 있는 충분조건을 다루었는데, 이는 현재 2차함수의 그래프와 간단한 부등식을 통하여 쉽게 얻을 수 있지만 그는 그래프가 없는 상황에서 이에 대한 결과를 얻었다.

조선의 거의 모든 산서가 단지 계산과 알고리즘 위주로 저술된 것과 비교하면, 저자가 수학을 체계적이고 구조적인 접근을 통하여 이해하고 또 그에 따라 결과를 얻어낸 것을 위의 사실이 단적으로 보여주고 있다.

저자의 서술 형식은 이론적인 것을 먼저 나타내고, 이를 뒷받침하는 예를 주로 『구장산술』, 매문정의 『방정론』, 이야의 『익고연단』, 『측원해경』, 주세걸의 『산학계몽』, 『사원옥감』 외에 『수리정온』, 곽수경의 『수시력』, 심괄의 『몽계필담』, 남병길의 『산학정의』에서 들고 있는데, 이들을 해당되는 짧은 문장만 인용하고 있어서 이들의 원본을 보지 못하면 이해할 수가 없게 되어 있다. 따라서 『익산』은 번역만으로는

그 내용을 충분히 전달할 수 없어서 번역의 형태에서 벗어나 역주譯註 형태로 번역을 하였다.

따라서 우리는 이들에 관하여 모든 경우에 원문을 들어 그 내용을 주 註로 첨가하였다. 이는 두 가지 목적이 있다. 하나는 독자가 이상혁을 제대로 이해하는 것과, 방정식의 이론이 동양 산학에서 어떻게 발전되어 왔는지 그 역사를 일차 사료, 즉 원문을 통하여 알아볼 수 있도록 하려고 원문과 그 주를 붙여 놓았다. 모든 연산이 산대를 통하여 이루어지므로 산대 셈법도 포함하고, 『사원옥감』의 가령사초假令四草도 원문에는 한 문제만 들어 있지만 나머지 세 문제도 모두 넣어 사원술을 이해하는 데 도움이 되도록 하였다.

중국 수학의 원문의 자료는 모두 1993년 하남교육출판사河南敎育出版社에서 출판한 『중국과학기술전적통휘』中國科學技術典籍通彙 수학권數學卷과 1994년 산동인민출판사山東人民出版社에서 출판한 『중국역대수학집성』中國歷代數學集成에서 인용하였다.

이상혁의 『익산』만 읽고자 하는 독자를 위하여 이상혁의 문장은 모두 궁서로 구별하였다. 그는 이론적인 것을 나타내는 부분과 해설 부분을 구별하였는데, 이론적인 부분을 일련 번호로 나타내어 해당되는 부분을 쉽게 찾을 수 있게 하였다. 해설 부분은 역자가 문맥에 따라 몇 개의 절로 나누어 놓았고, 문장도 번역에 맞추어 나누어 놓았다. 일반 산서와 같이 저자는 분절을 하지 않았음을 명기한다. 따라서 다른 번역이 가능할 수도 있다. 또, 천원술 및 사원술을 사용하여 다항식을 표현하는데 산대표시는 인쇄의 편의상 숫자로 대치한 것을 제외하면 원문을 그대로 싣는 것을 원칙으로 하였다. 따라서 이상혁의 원서를 그대로 살려 이를 일차 사료로 사용할 수 있도록 하였다.

한자가 이해에 도움이 된다고 생각되는 경우는 한자를 병기하고, 현대적인 의미로 식이나 문장을 나타내는 것으로 뜻이 분명해지는 경우에는 괄호 속에 넣어 나타내었다. 원문을 중점적으로 읽을 때는 이를 생략하고 읽어야 한다.

또 주의 내용을 이해하기 위하여 역자가 보충한 주에도 가능하면 일차 사료를 인용하는 것을 원칙으로 삼아 원문을 실었지만, 그 번역은 생략하였다.

19세기 수학자로 철저하게 하나의 이론을 가지고 방정식의 이론을 통일하고, 기존의 이론을 빠짐없이 연구하고 이를 창의적으로 재생산한 이상혁의 결과가 산대를 사용하고 있기 때문에 기호화를 통한 완전한 일반화가 이루어지지 못하여 현재의 수학과 단절된 것은 아쉬운 일이다. 실제로 다항식환을 계수만 가지고 나타내는 것이 천원술인데 이를 기호화하지 못한 것만 문제이지 그 나머지는 모두 현재에도 충분히 이용할 수 있는 것인데 잊혀지는 것이 아까울 따름이다.

翼算 역자 서문

下篇 堆垜說

저자 이상혁李尙爀과 그의 수학적 개념에 대한 접근 방식에 대하여 이미 우리는 익산翼算 상편上篇 정부론正負論의 역자 서문에서 자세하게 다루었다.

또 역자가 그의 저서에 대한 인식과 역주譯註의 서술 방식에 대하여도 상편의 역자 서문에 이미 들어내었고, 또 참고 문헌도 하편에 해당되는 것을 모두 상편에 포함하였다.

이 역자 서문에서는 하편下篇 퇴타술堆垜術에 대한 저자 이상혁의 이해와 그가 얻은 새로운 결과에 대하여 중점적으로 논하기로 한다.

퇴타술, 즉 유한급수론은 이미 『구장산술』에 나타난다. 초기에는 주로 등차수열의 합을 구하는 문제와 합을 알고 공차, 말항, 항의 수 등을 구하는 문제를 다루었다. 이때 2차방정식으로 이들이 해결되므로, 직사각형의 넓이와 두 변의 합이나 차가 주어지는 2차방정식과 다른 종류의 응용으로 주로 쓰였다. 등차수열에서 한 걸음 나아가

$$\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)(b+k-1)=ab+(a+1)(b+1)+\cdots+(a+n-1)(b+n-1)$$

의 형태의 급수를 심괄沈括(1031~1095)이 그의 저서 『몽계필담』夢溪筆談에서 취급하는데, 이를 사각뿔대의 부피와 비교하여 그 합을 구하였다. 그 합은 등차수열과 달리 항수 $(=n)$에 관한 3차식이 나온다. 이는 특히 $a=b=1$인 경우 $\sum_{k=1}^{n}k^2$, $a=1$, $b=2$인 경우 $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=2\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k}j)$ 등의 급수인데, 이들은 중요한 급수로 취급되었다.

심괄이 사각뿔대의 부피의 외연으로 위의 급수를 도입한 것처럼, 양휘楊輝는 그의 『상해구장산법』詳解九章算法(1261)에서 부피 문제를 다루면서 비류比類 문제로 위의 급수를 다루고, 또 『양휘산법』楊輝算法의 『전무비류승제첩법』田畝比類乘除捷法(1275)에서 등차수열과 그들의 변형을 다룬다. 이들은 규타圭垜 $(\sum_{k=1}^{n}k)$, 원전圓箭 $(1+\sum_{k=1}^{n}6k)$ ($\pi=3$으로 계산한 원둘레), 방전方箭 $(1+\sum_{k=1}^{n}8k)$, 제타梯垜 $(\sum_{k=m}^{n}k)$ 등인데, 이들의 이름에서 알 수 있듯이 급수를 모두 삼각형, 원, 정사각형, 사다리꼴 모양으로 늘어놓은 것의 합으로 이해하고, 그 합도 사다리꼴의 넓이로 계산하고 있다. 그는 후자를 평면에 늘어놓은 것으로 평타平垜, 전자를 입체로 쌓은 것으로 퇴타堆垜로 구별하여 부르는데, 이는 후에 모두 퇴타로 불리게 된다. 양휘의 급수에 대한 이론은 주세걸의 『산학계몽』算學啓蒙(1299)에도 그대로 취급되는데, 그들은 모두 합에 대한 정보는 알고 있는 것으로 되어 있다.

양휘나 산학계몽 수준의 급수에 대한 문제들은 조선 산서에 모두 나타나고 있다.

유한급수의 문제가 체계적으로 정리 된 것은 주세걸의 『사원옥감』四元玉鑑(1303)이다. 『익산』 상편의 역자 서문에서 언급하였듯이 그는 사원술의 예문을 드는데 유한급수의 합을 이용하여, 기하적으로 다룰 수 없는 4차 이상의 문제를 우리가 쉽게 이해할 수 있는 현상의 문제 해결로 다루고 있다.

그의 급수론을 이해하기 위하여 기호를 도입하고, 『사원옥감』에 나타나는 중요한 결과를 이 기호들을 사용하여 현대에 사용되는 방법으로 나타내면 다음과 같다.

A) $S^0_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n,\quad S^{r+1}_n = \sum_{k=1}^{n} S^r_k \quad (r=0,1,2,3,4)$로 정의하고,

S^1_n, S^2_n, S^3_n, S^4_n, S^5_n을 각각 교초적茭草積, 삼각타적三角垜積, 삼각낙일적三角落一積, 삼각살성적三角撒星積, 삼각살성갱낙일적三角撒星更落一積이라 한다. 주세걸은 위의 급수들의 이름에서 적積자 대신에 타垜자를 사용하고 있는데, 익산의 저자 이상혁은 이들을 모두 적積자로 사용하고 있어서 우리도 저자의 의도대로 용어를 적積자로 통일하기로 한다.

그 합은,

$$S^r_n = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{(r+1)!} = S^{r-1}_n \times \frac{n+r}{r+1}.$$

한편 반추차反錐差의 곱을 써서 그들 사이에 다음이 성립하는 것을 이용한다.

$$S^{r+2}_n = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) S^r_k \quad (r=0,1,2,3)$$

이들에 대한 증명은 없지만 그는 Pascal 삼각형으로 알려진 고법칠승방도古法七乘方圖에 위의 합이 나타나는 것을 이해한 것으로 추정하여, 이들을 삼각타 계열의 급수로 취급한다.

B) $T^0_n = n^2$, $T^{r+1}_n = \sum_{k=1}^{n} T^r_k \quad (r=0,1,2)$로 정의하고, T^1_n, T^2_n, T^3_n을 각각 사각타적四角垜積, 사각낙일적四角落一積, 사각살성적四角撒星積이라 하고, 이때 합은 다음과 같다.

$$T^r_n = 2S^{r+1}_n - S^r_n = S^r_n \times \frac{2n+r}{r+2} \quad (r=1,\ 2,\ 3).$$

반추차反錐差 표시는 앞에서와 같이

$$T^{r+2}_n = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\, T^r_k \quad (r=0,1).$$

C) $L^r_n = \sum_{k=1}^{n} kS^r_k$로 정의하고, L^1_n, L^2_n를 각각 교초남봉적茭草嵐峰積, 삼각남봉적三角嵐峰積이라 하고, 그 합은

$$L^r_n = (r+1)S^{r+2}_{n-1} + S^{r+2}_n$$

이고. 제전적梯田積의 곱을 써서

$$L^r_n = \sum_{k=1}^{n}(k+(k+1)+\ldots+n)S^{r-1}_k.$$

마찬가지 방법으로 $\sum_{k=1}^{n} k\times k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$, $\sum_{k=1}^{n} kT^1_k$을 각각 정방남봉적正方嵐峰積, 사각남봉적四角嵐峰積이라 하고, $\sum_{k=1}^{n} kT^1_k = 2L^2_n - L^1_n$을 얻고, 정방남봉적에서 정봉남봉갱낙일적正方嵐峰更落一積을 정의한다.

위의 B)와 C)의 경우 저자 이상혁은 다음 비례식

$$(n-1):(n+r) = S^r_{n-1} : S^r_n \ \ (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

이 성립하는 것을 보이고, 이를 사용하여 점화식

$$S^{r+1}_{n-1} = S^r_n \times \frac{n-1}{r+2}$$

을 얻어 그 합을 구하고 있다. 이는 저자의 독창적인 방법이다.

『사원옥감』에서는 단지 위의 합을 이곳 저곳에서 사용만 하고 있고 그 이유에 대한 언급이 전혀 없다. 그러나 저자 이상혁은 이를 체계적으로 정리하여 세 경우 **급수의 합에 대한 구조**를 밝혀내었다. 이는 저자가 수학을 총체적이고 체계적으로 이해하여 그 안에 들어 있는 구조를 찾아내고 있는 것으로, 현재 사용하고 있는 방법이다. 또 그는 여전히 기호화한 일반적인 증명은 못하였지만 이들에 대하여 세 개의 항을 택하여 증명을 하는데 이는 기호로 바꾸기만 하면 그대로 현재의 증명으로 사용될 수 있는 것이다.

저자 이상혁은 위의 급수들의 절적截積 (=부분합)에 대한 이론을 전개하는데, 이는 『사원옥감』에도 들어있지 않은 내용으로 저자의 독창적인 새로운 결과이다. 저자는 이 이론에 대한 접근 방법으로 두 가지 이론을 사용하는데 그 하나는 분적법이다.

가장 간단한 절적교초적 $\sum_{k=m}^{m+n-1} k$를 예로 들어 설명하면 다음과 같다. 현재 우리가 사용하고 있는 방법은 『수리정온』數理精蘊(1723)에서도 사용되고 있는 방법으로 $\sum_{k=m}^{m+n-1} k = \sum_{k=1}^{m+n-1} k - \sum_{k=1}^{m-1} k$로 두 교초적의 차로 계산하거나, 등차수열의 합의 공식을 사용하는 것이다. 그러나, 저자는 이 합을 사다리꼴 모양으로 늘어놓고 삼각형과 평행사변형 모양의 두 부분으로 나누어 다음과 같이 계산한다.

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (m-1)n = S_n^1 + (m-1)S_n^0$$

이 경우 n, m은 각각 층수, 아래층의 개수이다. 이 방법은 나머지 모든 경우에 활용되는데, 현재 우리가 계산하는 방법은 대수적 계산을 이용하는데 반하여, 기하적으로 간단하게 얻는 것을 유의하면 그의 방법이 뛰어남을 알 수 있다. 또 아래에서 정리한 여러 공식들을 보면 이 방법에서 여러 절적에도 앞의 경우와 같이 저자는 통일된 구조가 있다는 사실을 밝혀내고 있다.

저자가 활용한 또 하나의 방법은 계차수열을 사용하는 것이다. 계차수열을 사용하여 천체의 운행에 대한 결과를 얻은 것은 유작劉焯(544～610)의 황극력皇極曆(600), 일행一行의 대연력大衍曆(727), 서앙徐昻의 선명력宣明曆, 왕순王恂(1235～1281)과 곽수경郭守敬(1231～1316)의 수시력授時曆(1280) 등에 나타나는데, 급수의 합을 계산하는 방법으로 주세걸은 이를 채택하였다. 실제로 위의 모든 급수는 이 방법으로 계산할 수 있는데, 이때 위의 삼각타 계열의 급수들이 중요한 역할을 하게 된다. 이상혁은 이 방법을 사용하여 절적을 계산한다.

저자가 얻어낸 절적의 구조를 나타내기 위하여 그의 결과를 종합하면 다음과 같다.

I) 분적법分積法을 사용한 경우

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^r = S_n^{r+1} + S_{m-1}^0 S_n^r + S_{m-1}^1 S_n^{r-1} + S_{m-1}^2 S_n^{r-2} + S_{m-1}^3 S_n^{r-3}$$

($r=0, 1, 2, 3$이고, $r-k<0$이면 $S_n^{r-k}=0$이다)

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} T_k^r = T_n^{r+1} + 2(m-1)S_n^{r+1} + T_{m-1}^0 S_n^r + T_{m-1}^1 S_n^{r-1} + T_{m-1}^2 S_n^{r-2}$$

($r=0, 1, 2$이고, $r-k<0$이면 $S_n^{r-k}=0$이다)

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} (n-k+1)(m+k-1) = S_n^2 + S_n^1 S_{m-1}^0$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} (n-k+1)(m+(m+1)+\ldots+(m+k-1))$$

$$= S_n^4 + S_n^3 S_{m-1}^0 + S_n^2 S_{m-1}^1 + S_n^1 S_{m-1}^2$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} (n-k+1)\, T_{m+k-1}^1 = T_n^3 + 2(m-1)S_n^3 + T_{m-1}^0 S_n^2 + T_{m-1}^1 S_n^1$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} (k-m+1)\, S_k^1 = L_n^1 + (2m-2)S_n^2 + (S_m^1 + 1 - 2m)S_n^1$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} kS_k^1 = L_n^1 + (3m-3)S_n^2 + [(m-1)^2 + S_{m-1}^1 - (m-1)]S_n^1$$

$$+ S_{m-1}^1 (m-1)n$$

II) 3차법三差法, 4차법四差法을 사용한 경우

1. 삼각타절적 $\sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^1 = nS_m^1 + (m+1)S_{n-1}^1 + S_{n-2}^2$

사각타절적 $\sum_{k=m}^{m+n-1} k^2 = m^2 n + (2m+1)S_{n-1}^1 + 2S_{n-2}^2$

정방남봉절적

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} k^3 = m^3 n + (3m^2+3m+1)S_{n-1}^1 + (6m+6)S_{n-2}^2 + S_{n-3}^3$$

2. 삼각타절적, 사각타절적의 3차, 정방남봉적의 4차를 이용하여 다음 급수의 합을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)S_{m+k-1}^1 = S_m^1 S_n^1 + (m+1)S_{n-1}^2 + S_{n-2}^3$$

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(m+k-1)^2 = m^2 S_n^1 + (2m+1)S_{n-1}^2 + 2S_{n-2}^3$$

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(m+k-1)^3$$

$$= m^3 S_n^1 + (3m^2+3m+1)S_{n-1}^2 + (6m+6)S_{n-2}^3 + 6S_{n-3}^4$$

$$\sum_{k=1}^{n}(m+k-1)(k+(k+1)+\ldots+n) = mS_n^1 + 2(m+1)S_{n-1}^2 + 3S_{n-2}^3$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} kS_k^1 = S_m^1 S_n^1 + 2(m+1)S_{n-1}^2 + 3S_{n-2}^3$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+(k+1)+\ldots+n)S_{m+k-1}^1$$

$$= S_m^1 S_n^1 + 2S_{m+1}^1 S_{n-1}^2 + 3(m+2)S_{n-2}^3 + 4S_{n-3}^4$$

$$\sum_{k=1}^{n} kS_{m+k-1}^2 = S_m^2 S_n^1 + 2S_{m+1}^1 S_{n-1}^2 + 3(m+2)S_{n-2}^3 + 4S_{n-3}^4$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+(k+1)+\ldots+n)(m+k-1)^2$$

$$= m^2 S_n^1 + 2(m+1)^2 S_{n-1}^2 + 3(2m+3)S_{n-2}^3 + 8S_{n-3}^4$$

$$\sum_{k=1}^{n} kT_{m+k-1}^1 = T_m^1 S_n^1 + 2(m+1)^2 S_{n-1}^2 + 3(2m+3)S_{n-2}^3 + 8S_{n-3}^4$$

위의 모든 경우 전체 급수의 합에서 잘라낸 급수의 합을 뺀 것으로 계산할 수 있지만, 복잡한 계산이 요구되고 또 현재 사용하고 있는 인수분해가 없는 상황에서 이들을 모두 층수 $(=n)$와 초항에 관계되는 수 $(=m)$와 삼각 계열의 급수를 대입하여 계산할 수 있게 한 것은 매우 놀라운 결과이다.

저자는 하편에서 이 사실을 체계적으로 정리하고 또 12개의 예문을 들어 이를 설명하고 있다. 이 예문에서 그는 『사원옥감』의 해법과 같은 방법을 사용하고 있는데,

『사원옥감』의 방법과 다른 점을 부각시키려고 하였다. 그러나 이는 삼각타 계열의 급수의 합을 사용할 때, 음수를 최대한 사용하지 않으려고 『사원옥감』에서는 층수 $(=n)$를 치환하는 과정을 거치는데 이 부분을 저자가 간과하고 있는 것으로 보인다.

상편에서 방정식론을 다루면서 여러 가지 내용을 취급할 수밖에 없었지만 하편은 급수론이라는 한 주제를 대상으로 하고 사용되는 도구도 상편에 비하여 간단하다. 따라서 그의 서술은 상편보다 훨씬 체계적이고 통일되어 수학적 구조를 밝혀내는데 성공하였다.

익산 하편은 유한급수의 구조에 대한 완벽한 논문이고, 그의 계산 방법은 현재 우리가 사용하고 있는 계산 방법 보다 훨씬 우수하다.

거의 같은 시대에 출판된 이선란李善蘭(1811～1882)의 저서 『칙고석재산학』則古昔齋算學(1867)의 『타적비류』垛積比類 4권에서 다룬 연구 결과는 세계적으로 알려져 있는데, 조선 산학자 이상혁의 절적에 관한 연구 결과도 이에 비견되는 것이다.