제곱근과 세제곱근을 구하는 방법은『구장산술』제4권 소광少廣에 나오는데 제곱근의 문제는 정사각형의 넓이가 주어졌을 때 그 변의 길이를 구하는 문제(문問 12 ~16)의 풀이법으로 나와있다.

개방술은 다음과 같다. 주어진 넓이를 실實이라 두고 제곱근의 자리수를 정하기 위하여 산대 하나를 빌려서 실의 한 자리 수 아래에 둔다. 매 단계마다 한 자리씩 뛰어서 옮긴다. 근의 첫 번째 자리수를 추정한다. 추정된 수와 빌린 산대의 놓인 수를 곱하여 이를 법法으로 정한다. 그리고 뺄셈을 하고 법의 두 배를 정법定法이라 한다. 두 번째 뺄셈을 준비한다. 정법을 한 자리 오른쪽으로 옮기고 빌린 산대는 전과 같이 정한다. 근의 두 번째 자리수를 추정한다. 그 수와 빌린 산대를 곱하여 정법에 더한다. 두 번째 뺄셈을 하고, 정법에 한번 더 위의 곱한 수를 더한다. 같은 방법을 계속한다.

開方術曰[a] 置積爲實 借一算 步之超一等 議[b]所得 以一乘所借一算爲法 而以除 除已 倍法爲定法 其復除 折法而下 復置借算 步之如初 以復議一乘之 所得副以加定法 以除 以所得副從定法 復除 折下如前

a) 위의 개방술의 과정을『구장산술』제12문을 예로 들어 설명하면 다음과 같다.

議			200	200	200	200	200
實	55225	→ 55225	→ 55225	→ 55225	→ 15225	→ 15225	→ 15225
法				20000	20000	40000	4000
借	1	10000	10000	10000	10000	10000	100

議	230	230	230	235
實	15225	→ 15225	→ 2325	→ 2325
法	4000	4300	4600	460
借	100	100	100	1

이를 현재 사용하고 있는 식을 이용하여 설명하면 다음과 같다.

방정식 x^2=55225를 풀 때, 우선 $x = 100a + 10b + c$라 놓고 a, b, c ($0 \le a, b, c \le 9$)를 구하는 문제로 접근한다. 따라서 a를 구하기 위하여
$x = 100x_1$로 치환하여 다음에서 a를 추정하여 2를 얻는다.

$$10000x_1^2 = 55225 \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

다음 b를 구하기 위하여 위의 방정식 (i)에 $x_1 = y + 2$로 치환하여 다음 방정식을 얻는다.

$$10000(y+2)^2=55225,\ \text{즉}$$

$$10000y^2+40000y=15225 \quad \cdots\cdots(\text{ii})$$

$b=10y$이므로 $10y=y_1$로 치환하여 (ii)에서 다음을 얻는다.

$$100y_1^2+4000y_1=15225 \quad \cdots\cdots(\text{iii})$$

그리고 b를 추정하여 3을 얻는다.

c를 구하기 위하여 (iii)에 $y_1=z+3$으로 치환하여 방정식을 얻는다.

$$100z^2+4600z=2325 \quad \cdots\cdots(\text{iv})$$

$c=10z$이므로 $10z=z_1$로 치환하여 (iv)에서 다음을 얻는다.

$$z_1^2+460z_1=2325 \quad \cdots\cdots(\text{v})$$

(v)에서 $z_1=5$를 얻어 $c=5$를 얻는다.

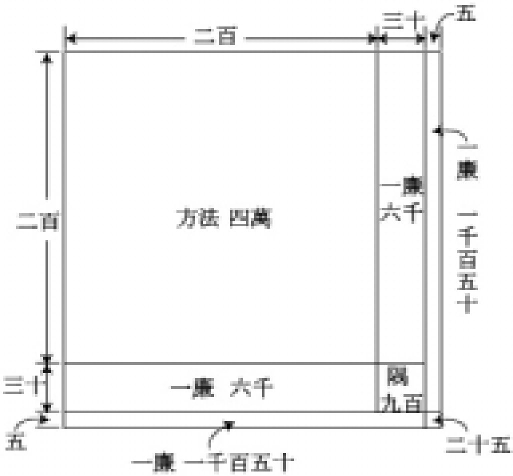

그림 1

위의 방법을『구장산술』에서는 위의 **그림** 1을 통하여 설명하고 있다.

이는 대수적으로 다음을 통하여 쉽게 이해할 수 있다.

$(a+b)^2-a^2=(2a+b)b$, ($2a$는 정법定法)

$(a+b+c)^2-(a+b)^2=((2a+2b)+c)c$ (위의 4600에 대한 설명)

그러나 그 당시 수학은 이를 모두 기하적으로 이해하고 있다. 또 이를 간략하게 계산하는 방법은 다음과 같다.

	5,52,25	(2는 100의 자리수
-2^2	4	
$\div(2\times 2)$	1,5	(3은 10의 자리수
	1,2	
	32	
-3^2	9	
$\div 2\times 23$	23,2	(5는 1의 자리수
	23,0	
	25	
-5^2	25	
	0	

b) 의議와 상商은 같이 쓰이다가 나중에 상商으로 통일되었는데 나눗셈이나 제곱근을 구할 때 추정하는 과정을 나타낸 것이다. 따라서 제곱근을 구하는 것도 나눗셈을 하는 식으로 생각하였다. 단지 제수除數(=법法)를 정하여 가면서 구하는 것으로 이해하고 있다.

세제곱근의 문제는 정육면체의 부피를 주고 한 변의 길이를 구하는 문제로 문問 19~22에서 취급하고 있다.

개입방술은 다음과 같다. 주어진 부피를 실이라 두고 세제곱근의 자리수를 정하기 위하여 산대 하나를 빌려서 실의 한 자리 수 아래에 둔다. 매 단계마다 두 자리씩 뛰어서 옮긴다. 근의 첫 번째 자리수를 추정한다. 추정된 자리수의 세제곱과 빌린 산대가 놓인 수를 곱하여 법法이라 한다. 그리고 뺄셈을 한다. 그러고 나서 법의 3배를 정법定法이라 한다. 두 번째 뺄셈을 준비한다. 정법을 한 자리 아래로 옮기고 그 수를 3배하여 이를 중항이라 한다. 또 다른 산대를 한 개 빌려서 하항에 놓는다. 그들을 옮기는데 중항은 두 자리, 하항은 세 자리 아래로 옮긴다. 그러고 나서 세제곱근의 두 번째 자리수를 추정한다. 이 자리수와 중항을 곱하고 그 자리수의 제곱과 하항을 곱하여 이들을 더하여 이를 두 번째 뺄셈에 대한 정법定法으로 삼는다. 하항을 두 배하고 이를 중항에 한 번 더 더한다. 이 합을 위의 정법定法에 더한다. 이 방법을 반복한다.
開立方術[a)]曰 置積爲實 借一算 步之超二等 議所得 以再乘所借一算爲法 而以除 除已 三之爲定法 復除 折而下 以三乘所得數 置中行 復借一算 置下行 步之中初一 下超二位 復置議 以一乘中 再乘下 皆副以加定法 以定除 除已 倍下 幷中從定法 復除

折下如前

a) 위의 개입방술을 제19문에 적용하면 다음과 같다.

議					100		100		100
實	1860867		1860867		1860867		1860867		860867
法		→		→		→	1000000	→	1000000
中									
下									
借	1		1000000		1000000		1000000		1000000

議	100		100		100		100		100
實	860867		860867		860867		860867		860867
法	3000000	→	300000	→	300000	→	300000	→	300000
中					3000000		3000000		30000
下							1000000		1000
借	1000000		1000000		1000000		1000000		1000

議	120		120		120		120		120
實	860867		860867		860867		132867		132867
法	300000	→	300000	→	364000	→	364000	→	364000
中	30000		60000		60000		60000		60000
下	1000		4000		4000		4000		8000
借	1000		1000		1000		1000		1000

議	120		120		120		123
實	132867		132867		132867		132867
法	364000	→	432000	→	43200	→	44289
中	68000		36000		360		1080
下	8000		1000		1		9
借	1000		1000		1		1

이를 현재 사용하고 있는 식을 이용하여 설명하면 다음과 같다.

방정식 x^3=1860867을 풀 때, 제곱근의 경우와 같이 우선 $x=100a+10b+c$로 놓고 a, b, c (0≤ a, b, c≤9)를 구하는 문제로 바꾼다. 따라서 a를 구하기 위하여 x=100 x_1로 치환하여 다음에서 a를 추정하여 1을 얻는다.

$1000000x_1^3$=1860867 …… (i)

다음 b를 구하기 위하여 위의 방정식 (i)에 $x_1 = y+1$로 치환하여 다음 방정식을 얻는다. $1000000(y+1)^3$=1860867, 즉

$1000000y^3 + 3000000y^2 + 3000000y$=860867 …… (ii)

$b=10y$이므로 $10y = y_1$로 치환하여 (ii)에서 다음을 얻는다.

$1000y_1^3 + 30000y_1^2 + 300000y_1$=860867

그리고 b를 추정하여 2를 얻는다.

다음 c를 구하기 위하여 (ii)에 $y_1 = z+2$으로 치환하여

$1000z^3 + 36000z^2 + 432000z$=132867 …… (iii)

$c=10z$이므로 $10z = z_1$으로 치환하여 (iii)에서 다음을 얻는다.

$z_1^3 + 360z_1^2 + 43200z_1$=132867 여기서 $z_1 = 3$을 얻어 c=3을 얻는다.

이 방법을 『구장산술』에서 다음 **그림** 2를 통하여 설명하고 있다.

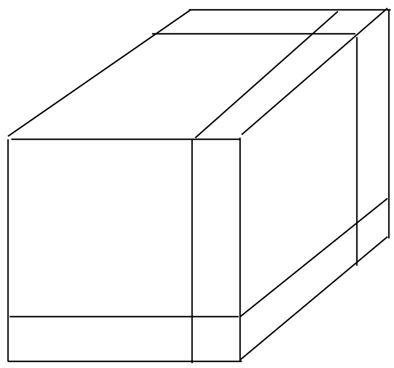

그림 2

이는 대수적으로 다음 식을 통하여 이해할 수 있다.

$$(a+b)^3 - a^3 = (3a^2 + 3ab + b^2)b$$

또, 이를 간략하게 계산하는 방법은 다음과 같다.

	1,860,867	(1은 100의 자리수
-1^3	1	
÷(3×12)	0,8	(2는 10의 자리수
	6	
	26	
$-(3\times1\times2^2)$	12	
	140,	
-23	8	

$\div(3\times 12^2)$	1328	(3은 1의 자리수
	1296	
	326	
$-(3\times 12\times 3^2)$	324	
	27	
-3^3	27	
	0	

위의 두 경우 모두 근의 근사값 a (제곱근의 경우 200, 세제곱근의 경우 100)를 먼저 구하고 그 다음 $x=a+y$를 대입하여 y의 근사값을 구하였다. 실제로 두 번째 자리수 b부터는 각각 2차방정식과 3차방정식을 푸는 문제이다. 중국의 산학자들은 이 방법을 2차 이상의 방정식 풀이에 적용하여 해를 구하였다.

중국 산학자들은 근의 개수나 부負의 근에 대하여는 관심이 없었고 정의 근 하나만 구하면 그것으로 만족하였다.

먼저, 2차 및 3차방정식은 7세기경 왕효통王孝通의 『집고산경』緝古算經에서 다루어지고 있다. 그는 방정식 $x^2+ax=b$에서 a를 종법從法, b를 실實이라 하고, 방정식 $x^3+ax^2+bx=c$에서 a를 염법廉法, b를 방법方法, c를 실實이라 하였다. 13세기부터 고차방정식의 계수를 (4-4)의 주 2)에서 언급한 대로 실實, 방方, 상염上廉, 이렴二廉, …, 하염下廉, 우隅로 확정되었고, 또 천원술이 나오기 전에 미지수가 하나인 다항방정식은 천원술의 특수한 경우인 한 행行으로 표시하였다. 실實(=태太)로부터 아래로 방方, 상염上廉, …의 계수를 나타내거나 위로 방方, 상염上廉, …의 계수를 나타내어 방정식을 표시하였다.

방정식의 표시에서 주의할 것은 $p(x)=0$이 아닌 $p(x)$로 나타내었다. 또 다항식 사이의 연산은 이 표시로 쉽게 계산할 수 있었다.

다항식 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$에 대하여 방정식 $p(x)=0$에서 $p(y+a)$를 계산하여야 한다. 이때, 자연스럽게 $(a+b)^n$을 계산할 필요가 생겼는데, 현재 파스칼(Pascal, 1623~1662)의 삼각형으로 알려져 있는 계산법은 11세기 북송北宋의 가헌賈憲이 이를 이용하여 방정식을 풀었다. 그는 『황제구장산법』黃帝九章算法이라는 책을 썼지만 소실되었고, 13세기 양휘楊輝의 『상해구장산법』詳解九章算法(1261) 구고句股 제구第九편에 개평방법 개입방법 항목에 가헌입성석쇄賈憲立成釋鎖로 가헌의 증승개방법增乘開方法에 대한 이론을 소개하고 있다. 양휘는 위의 파스칼 삼각형이 가헌의 『석쇄산서』釋鎖算書(이 책도 소실되었음)에 들어 있다고 『상해구장산법』에 기술하였다. 양휘가 소개한 가헌의 방법과 진구소가 『수서구장』(1247)에서 사용한 방법은 일치한다.

위의 개방술을 증승개방법增乘開方法으로 설명하면 다음과 같다.

$\sqrt{55225}$를 구하는 것은 방정식 x^2-55225=0을 푸는 문제인데, 이때 그는 2차방정식의 2차항의 계수를 하법下法(=우偶), 1차항의 계수를 방方, 상수항을 실實로, 3차방정식은 3차항부터 차례로 하법下法, 염廉, 방方, 실實로 하고 이를 차례로 아래부터 쌓고 그 위에 의議(=상商)를 놓는다. $x=100a+10b+c$(0≤ a, b, c≤9)에서 a를 구하는 방법은 위와 같고 그 다음 b를 구하기 위하여 식 (i) $10000x_1^2$-55225=0에서 $x_1=y+2$를 치환하여 식 (ii) $10000y^2$+ $40000y$-15225=0을 구하는 방법을 다음과 같은 알고리듬을 사용하고 있다.

10000		0		-55225		(2
		20000 ↓		40000 ↓		
10000	↗	20000	↗	-15225		
		20000 ↓				
10000	↗	40000				

이 그림에서 ↓와 ↗은 각각 더하기와 2×(주어진 수)를 뜻한다. 또 식(iii) $100y_1^2$+ $4000y_1$=15225에서 $y_1=z+3$을 치환할 때 위의 방법을 사용하면 다음을 얻는다.

100		4000		-15225		(3
		300 ↓		12900 ↓		
100	↗	4300	↗	-2325		
		300				
↓100	↗	4600				

즉, 식 (iv) $100z^2$+ $4600z$-2325=0을 얻는다. 따라서 식
(v) z_1^2+ $460z_1$=2325를 얻고, 다음에 의하여 x=235를 얻는다.

1		460		-2325		(5
		5 ↓		2325 ↓		
1	↗	465	↗	0		

이를 정리하면 $p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$에서 다음을 얻음을 뜻한다.

$$p(y+b)=a_2y^2+((a_1+a_2b)+a_2b)y+(a_0+(a_1+a_2b)b)$$

이를 "이상승하법以商乘下法 체증승지遞增乘之"라고 말하고 이를 증승개방법增乘開方法이라 하였다.

이 방법을 임의의 다항방정식에 적용하여 다항방정식의 근을 구하였다. 즉, $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$에 대하여 $p(y+b)$를 다음과 같이 구한다.

$b_n=a_n,\ \ b_{n-1}=a_{n-1}+bb_n,\ \ b_{n-2}=a_{n-2}+bb_{n-1},\ \cdots,\ \ b_1=a_1+bb_2,$

$b_0=a_0+bb_1$이라 놓고, 마찬가지로 다음과 같이 정의한다.

$$c_{k-1}=b_{k-1}+bc_k,\ \ c_n=a_n,\ (k\geq 2)$$

$$d_{k-1}=c_{k-1}+bd_k,\ \ d_n=a_n,\ (k\geq 3)\ \cdots$$

그러면 다음을 얻는다. ↓은 위의 두 항을 더하는 것이고 ↗은 아래 항에 b를 곱하는 것을 의미한다.

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_n & a_{n-1} & & a_{n-2} & & \cdots & a_1 & & a_0 & \\
 & ba_n & \downarrow & b(a_{n-1}+ba_n) & \downarrow & \cdots & bb_2 & \downarrow & bb_1 & \downarrow \\
a_n & b_{n-1} & \nearrow & b_{n-2} & & \cdots & b_1 & \nearrow & b_0 & \\
 & ba_n & \downarrow & b(b_{n-1}+ba_n) & \downarrow & \cdots & bc_2 & \downarrow & & \\
a_n & c_{n-1} & \nearrow & c_{n-2} & & \cdots & c_1 & & & \\
 & ba_n & \downarrow & b(c_{n-1}+ba_n) & \downarrow & \cdots & & & & \\
a_n & d_{n-1} & \nearrow & d_{n-2} & \nearrow & \cdots & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

이 과정을 n번 시행하면 다음을 얻는다.

$$p(y+b)=a_n y^n+(a_{n-1}+nb)y^{n-1}+\ldots+d_2y^2+c_1y+b_0,\ \text{즉}$$

$$p(x)=a_n(x-b)^n+(a_{n-1}+nb)(x-b)^{n-1}+\ldots+d_2(x-b)^2+c_1(x-b)+b_0$$

따라서 이 방법은 현재 조립제법組立除法으로 알려진 방법에 의하여 구하는 것과 같다.

위의 방법이 증승개방법인데, 주세걸의 『산학계몽』의 개방석쇄문開方釋鎖問에서도 다루었다.

실제로 $b_0=p(b)$이다. 이 과정은 루피니(Ruffini, 1765 - 1822)가 1804년에, 호너(Horner, 1786 - 1837)가 1819년에 발표하였으므로 루피니-호너 방법이라고 불러야 하지만, 현재 호너의 방법으로 알려져 있다. 그러나 이미 700여년 전에 중국 수학자들은 이를 사용하고 있었다.

진구소의 『수서구장』 제5권 첨전구적尖田求積 문제에 이 방법이 자세히 나와 있는데 이를 예로 들어 설명하자.

問有兩尖田一段 其尖長不等 兩大斜三十九步 兩小斜二十五步
中廣三十步 欲知其積幾何
荅曰 田積八百四十步

두 이등변삼각형이 길이가 30보인 밑변을 공유하고 나머지 변들의 길이가 각각 39보와 25보인 경우 두 삼각형의 넓이의 합을 구하는 문제로 술術에서 구하는 넓이 x는 방정식 $-x^4+763200x^2-40642560000=0$의 해가 되는 것을 설명하고, 초草는 이를 푸는 방법에 대한 설명을 하고 있는데, 이는 위의 제곱근을 푸는 방법으로 $x=100a+10b+c$ $(0\leq a,b,c\leq 9)$로 놓고 그 자리수 a,b,c를 구하고 있다. 이 경우는 다음 제6권 환전삼적環田三積 문제에서 설명하기로 한다. 초에 이어 그는 정부개삼승방도正負開三乘方圖를 첨가하였는데 이는 자리수를 구하는 대신에 직접 $100a$, $10b$, c를 구하는 과정을 산대 표시로 자세하게 설명하고 있다. 그러나 산대 표시에서 산대를 옮겨놓아 자리수 계산을 하는 것으로 보아야 하지만, 옮겨 놓은 자리수를 무시하면 완전히 현재 우리가 사용하는 조립제법 형식으로 나타나 있다. 실제로 자리수만을 옮겨 놓는 것으로 보았다면 초상은 800대신에 8이어야 하고, 또 우 -1과 초상의 곱으로 -8만 나타내면 될 것인데, -800으로 나타내고 그 다음 모든 단계에서도 800을 곱한 결과를 나타내고 있다. 정부개삼승방도를 현재 조립제법 형식으로 나타내면 다음과 같다.

-1	0	763200	0	-40642560000	(800
	-800	-640000	98560000	78848000000	
-1	-800	123200	-925440000	38205440000	
	-800	-1280000	-826880000		
-1	-1600	-1156800			
	-800	-1920000			
-1	-2400	-3076800			
	-800				
-1	-3200				

이 과정에서 초상初商(＝해의 가장 큰 자리수의 근사값)을 800으로 하여, 다음 10의 자리에 대한 근사값을 구하기 위한 방정식은

$$-y^4-3200y^3-3076800y^2-826880000y+38205440000=0$$

이 된다. 이때 근을 40으로 추정하여 다음과 같이 다시 조립제법을 써서

-1	-3200	-3076800	-826880000	38205440000	(40
	-40	-129600	-128256000	-38205440000	

-1	-3240	-3206400	-955136000	0

에서 구하는 방정식의 근 $x=840$을 구하고 있다. 이 경우 흥미 있는 것은 실實의 부호는 정正으로 하고 $p(800)=38205440000$을 부실負實로 나타내고 각 계산에서 정, 부에 대한 표현이 부족하지만 현재 우리가 사용하고 있는 방법과 일치한다. 특히 실의 부호가 바뀌는 것에 대하여 환골換骨이라는 단어로 나타내고 이를 술術에서는 개번법삼승방득적開飜法三乘方得積, 즉 번법이 들어있는 4차방정식의 풀이에 의하여 답을 구할 수 있다고 하였다. 이는 조건을 만족하는 최종 결과가 항상 정正인 경우만 취급하다가 부負인 경우도 나타날 수 있다는 것에 대하여 주의를 주고 있는 것이다. 아직 정수正數와 부수負數를 사용은 하고 있지만 부수에 대한 거부감이 있음을 단적으로 보여 주는 대목인데, 이는 조선 산서에 계속하여 나타나고 있다. 그는 환골과 함께 투태投胎라는 개념을 도입하였는데, 이는 후에 익적益積으로 나타난다. 익적과 번적은 [18], [21], [23]에서 자세히 다룰 것이며, 투태는 (41-1)의 주 1)에서도 취급한다.

위의 예를 들면서, 우리는 환전삼적 문제에 대하여 언급하였는데 이 경우도 제곱근 형태의 자리수를 구하는 초草와 그 뒤에 바로 위에 들은 조립제법을 나타내는 도표를 첨가하였다. 자리수를 구하는 초를 설명하면 다음과 같다.

問環田大小圓田共三段環田外周三十步虛徑八步大圓田徑一十步
小圓田三十步 欲知三田積及環內周通實徑大圓周小圓徑各幾何
荅曰　環田積二十步二百三十六萬二千二百五十六分步之一百二十九萬八千二十五
通徑九步一十九分步之九 實徑一步一十九分步之九 內周二十五步一十七分步之五
大圓田積七十九步五十三分步之三 周三十一步二十一分步之十三
小圓田積七十一步二百八十六分步之四十三 徑九步一十九分步之九

여기서는 환전의 넓이 x에 대하여만 설명을 하기로 한다. 술術에서 x는 $-x^4+15245x^2-6262506.25=0$의 근이 되는 것을 설명하고 초草에서 아래와 같이 풀 수 있음을 설명하고 있다.

이 방정식의 해를 우선 $x=10a+b+r$ $(0\leq a,b\leq 9,\ 0\leq r<1)$로 추정하는 것은 제곱근과 세제곱근을 구하는 경우와 같다. 진구소도 다른 수학자와 마찬가지로 항상 정正의 근만을 근이라고 생각하였으므로, a를 추정하기 위하여 $x=10x_1$로 치환하여

$$-10000x_1^4+1524500x_1^2-6262506.25=0$$

을 얻고, 이때 $a=2$로 추정하고, b를 추정하기 위하여 $x_1=y+2$로 치환하는데 여기에 증승개방법을 사용하여 다음과 같이 진행한다.

-10000	0	1524500	0	-6262506.25	(2

	-20000	-40000	2969000	5938000	
-10000	-20000	1484500	2969000	-324506.25	
	-20000	-80000	2809000		
-10000	-40000	1404500	5778000		
	-20000	-120000			
-10000	-60000	1284500			
	-20000				
-10000	-80000				

이를 통하여 다음을 얻는다.

$$-10000y^4-80000y^3+1284500y^2+5778000y-324506.25=0$$

$10y=b$이므로 $10y=y_1$로 치환하는 것도 위의 개평방, 개입방의 경우와 같다. 따라서 다음 방정식에서 $b=0$을 추정한다.

$$-y_1^4-80y_1^3+12845y_1^2+577800y_1-324506.25=0$$

진구소는 그 다음 보간법을 사용하여 r을 구하여 방정식의 근의 근사값으로 $x=20\frac{1298025}{2362256}$을 구하였다.

보간법은 다음과 같다.

지금 다항식 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x-b$에 대하여 다항방정식 $p(x)=0$의 근이 0과 1 사이에 있다고 가정하자.

두 점 $(0,\ p(0))$와 $(1,\ p(1))$, 즉 $(0,\ -b)$와 $(1,\ a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1-b)$를 지나는 직선 $y=(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1)x-b$의 x절편, 즉 $y=0$의 해

$x=\dfrac{b}{a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1}$를 $p(x)=0$의 해의 근사값으로 택하는 것이다.

이를 이용하여 $r=\dfrac{324506.25}{-1-80+12845+577800}=\dfrac{1298025}{2362256}$를 얻어낸 것이다.