이수신편 제 23 권(理藪新編 卷之二十三)

산학본원
(算學本源)

서명산인 황윤석(西溟散人 黃胤錫) 편집
강신원 · 장혜원 번역

한국수학사학회

조선 시대의 산학서를 내면서

한국수학사학회에서는 한국학술진흥재단이 지원한 2002년도 기초학문육성지원사업(인문사회분야 국학고전연구)의 일환으로 연구 과제 《조선 시대의 산학서 번역》을 수행했다. 이의 목적은 다음과 같다.

(1) **한국 수학사 연구의 기초 마련** 우리의 전통 수학을 체계적으로 번역하고 현대적인 관점에서 해석한 결과물을 제시함으로써, 이에 대한 연구를 자극하는 촉진제와 연구의 기초를 마련한다.

(2) **고전에 대한 접근 용이성 및 자료 보급** 고전 문헌을 현대어로 번역함으로써, 많은 사람들에게 우리의 전통 수학을 접할 수 있는 기회를 제공한다.

이를 위해 다음과 같은 10종의 산학서를 선택하여 번역했다.

『默思集算法』	천 · 지 · 인 3권
『九數略』	건 · 곤 2권
『九一集』	천 · 지 · 인 3권
『算學入門』(『이수신편』 21 · 22권) 2권	
『算學本源』(『이수신편』 23권) 1권	
『算術管見』	1권
『借根方蒙求』	건 · 곤 1권
『翼算』	상 · 하편 2권
『測量圖解』	1권
『劉氏句股述要圖解』	1권

한국수학사학회 회장

역자 서문

이재 황윤석(頤齋 黃胤錫)은 영조 50년(1774)에 이수신편(理藪新編)을 완성했는데, 제23권 <산학본원>에 대해 황윤석 자신은 그 책의 첫 장에서 다음과 같이 설명하고 있다.

> 世傳算學書所謂算學原本 乃本國人所編 〔鶴城朴繘所編嘗經殷山郡守沒後其子斗世就正此書于崔錫鼎序之刊行〕 而攷其書或誤訛 究其法多闕漏 今另加修潤正之補之 遂載于此 蓋原本啓蒙之階梯 而吾此書又原本之階梯也
>
> 세상에 전하여지는 산서 중에 이른바 〈산학원본〉이라고 하는 책이 있다. 이것은 우리나라 사람이 편집한 것이다. 〔학성의 박율이라는 사람이 편집한 것이고, 그는 한때 은산 군수를 지냈다. 이 사람이 죽은 후에 그의 아들 두세가 이 책을 바로 잡아 최석정에게서 서문을 받아 출판하였다.〕 그런데 이 책을 보면 어느 곳은 잘못되거나 사실과 다르고 그 해법을 살펴보면 여러 가지 빠진 부분이 많다. 여기서 다시 고치고 바로 잡아 새로운 것을 보충하여 이수신편에 싣는다. 〈산학원본〉은 중국의 〈산학계몽〉의 입문 해설서이나 내가 쓴 이 책 〈산학본원〉은 〈산학원본〉의 입문 해설서이다.

이 설명이 분명히 말해주고 있는 바와 같이 <산학본원>은 주세걸이 저술한 <산학계몽>의 입문 해설서라고 할 수 있다. 이 책이 다루고 있는 주요 내용은 다음과 같은 것이다.

직방원율에서는 어떤 수의 제곱근을 구할 때 정수 이외의 부분이 있으면 이것을 근사값으로 표시하는 방법과, 역으로 근사값으로 표시된 제곱근을 환원하여 원래 수를 구하는 연산을 다룬다.

또한 동문산지개평방기령법에서는 산서 <동문산지(同文算指)>에 수록되어 있는 개평방의 축차근사값을 구하는 예가 있다. 그 중의 한 예는 <동문산지>의 본문이 틀렸는데도 아무런 검증 없이 그대로 인용하고 있다. 이것은 황윤석이 사대부 신분의 지식인으로서 산학을 연구하고 있으며 중인 산학자들처럼 전문 산학 연구가가 아님을 대변하는 것이다.

원율삼가에서는 조충지원산에 대하여 심도있게 다루고 개방술에서는 개평방(이차방정식의 풀이)에서 개칠승방(팔차방정식의 풀이)까지의 공식을 설명하고 있다. 다음의 광제승방법에서는 천원술을 이용한 방정식의 해법을 예를 들어 고차방정식까지 비교적 자세히 설명한다. <산학계몽>으로 유입된 천원술을 평이하게 설명하려고 노력하는 데 많은 지면을 할애하고 있다.

일러두기

이 책은 다음과 같은 사항에 따라 작성하였다.

1. 국역 원본은 다음 책에 수록된 <이수신편 제23권 산학본원>이다.
   한국과학기술사자료대계 수학편 3 (김용운 편, 여강출판사, 1985)

2. 번역은 원문에 충실하게 직역하는 것을 원칙으로 한다.

3. 번역문을 먼저 제시하고 이어 대응하는 원문의 한자어를 제시한다.

4. 이 활자체로 쓰여진 것이 원문에 해당하는 번역 및 원문의 내용이다.

5. 책의 방대한 내용을 체계적으로 제시하기 위해 각 주제마다 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, …을 첨부하고, 그 아래 소주제에 대해 [1-1], [1-2],… 와 같이 번호를 부여하여 작성하였다.

6. 원문에서 저자는 작은 활자로 주해를 첨부하였으나, 번역서에서는 편의상 [ ] 안에 제시하기로 한다.

7. 역자 주는 본문 중의 '☞ 역자 주: ' 및 각주를 이용하여 제시한다. 전자는 내용과 관련하여 더 일반적인 설명을 위해, 후자는 원문의 구체적인 부분과 관련하여 부가적인 설명이나 잘못된 내용을 수정하기 위해 사용한다.

8. 책이름은 < >로 표시한다.

9. 역자 주에서 인용한 참고문헌은 각주로 처리하여 제시한다.

목차(目次)

이수신편 제 23 권 理數新編卷之二十三

서명산인 황윤석 편집(西溟散人 黃胤錫 編輯)

산학본원 算學本源

세상에 전하여지는 산서 중에 이른바 〈산학원본〉이라고 하는 책이 있다. 이것은 우리나라 사람이 편집한 것이다. 〔학성의 박율이라는 사람이 편집한 것이고, 그는 한때 은산 군수를 지냈다. 이 사람이 죽은 후에 그의 아들 두세가 이 책을 바로 잡아 최석정에게서 서문을 받아 출판하였다.〕 그런데 이 책을 보면 어느 곳은 잘못되거나 사실과 다르고 그 해법을 살펴보면 여러 가지 빠진 부분이 많다. 여기서 다시 고치고 바로 잡아 새로운 것을 보충하여 이수신편에 싣는다. 〈산학원본〉은 중국의 〈산학계몽〉의 입문해설서이나 내가 쓴 이 책 〈산학본원〉은 박율이 쓴 〈산학원본〉의 입문해설서이다.

世傳算學書所謂算學原本 乃本國人所編〔鶴城朴繘所編嘗經殷山郡守沒後其子斗世就正此書于崔錫鼎序之刊行〕 而攷其書或誤訛 究其法多闕漏 今另加修潤正之補之 遂載于此 蓋原本啓蒙之階梯 而吾此書又原本之階梯也

1 직방원율(直方圓率)

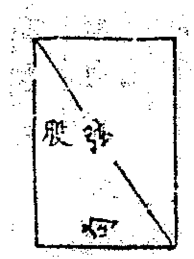
〔개평방1)의 부분〕〔開方之分〕

여기에 써있는 것을 보면 오직 평방을 풀어 분수로 나타내는 방법만 있다. 입방 이상의 예는 없다. 그것이 더 어려우므로 하고자 아니 하였다. 마땅히 다시 생각할 일이다.
按此所載只有開平方 命分母子之法 而立方已上 獨闕其例 豈其愈涉艱棘 故未有推演耶 當更思

〔1-1〕
〈구장산술〉에 구3 고4 현5의 비율에 대하여 써 있다. 방오사칠(정사각형의 변이 5일 때 대각선이 7)2)의 뜻은 없다. 〔구는 직각으로 모난 것이다. 음은 평성이다.〕
〔구고현은 목공의 직각으로 구부러진 곡척자와 같이 비유된다. 자의 구부러진 머리 부분은 구이다. 자의 기다란 가지 부분은 고이다. 머리 부분과 가지 부분의 끝을 서로 이으면 그것이 현이다 구3을 제곱하면 9이다. 고4를 제곱하면 16이다. 합하면 25이고 제곱근을 구하면 현5를 얻는다. 방오사칠의 비율은 〈산학계몽〉에서 볼 수 있다.
九章有句三股四弦五之率 無方五斜七之義 〔句曲3)也 平聲〕
〔句股弦比如木匠曲尺 尺頭句也 尺梢股也 尺頭與尺梢盡處相去弦也○句三自乘九 股四自乘一十六 合二十五 開平方得弦五 方五斜七之率見於啓蒙〕

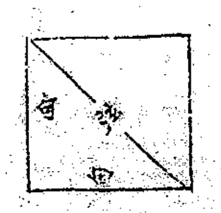
직적(直積)

1) '개평방'이란 제곱근 구하는 것을 포함하여 평방, 즉 이차방정식을 푸는 것을 뜻한다. 세제곱근, 네제곱근, …, n제곱근을 구하는 것, 일반적으로 삼차방정식, 사차방정식, … n차 방정식을 푸는 것을 각각 개입방, 개삼승방, …, 개$(n-1)$승방이라 하며 총칭하여 개방술이라 한다. 주의할 것은 n차원을 다룰 때 그 명칭에서는 $n-1$이 붙는다는 것이다. 예컨대 개삼승방은 사차방정식을 푸는 것이며, 마찬가지로 삼승방체라 하면 모든 모서리의 길이가 같은 4차원 도형을 뜻한다.
2) 방5사7은 한 변이 5일 때 대각선 $\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}$을 7로 보는 것으로, 매우 근사적인 비율이다. [1-9] 참고.
3) 곡(曲)은 곡척전에서와 같이 90도로 구부러진 ㄱ자형(gnomon)을 의미한다.



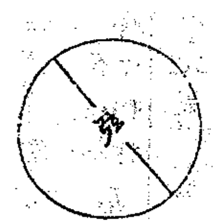
직사각형의 길이4)는 고이다. 너비는 구이다. 대각선은 현이다.
長爲股 闊爲句 斜爲弦

방적(方積)



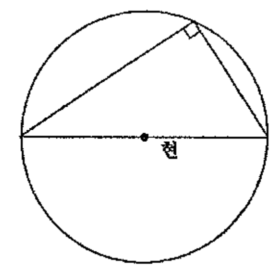
정사각형의 변은 구가 되고 또 고가 된다. 대각선은 현이다.
面爲句爲股 斜爲弦

원적(圓積)



원의 지름은 현이 된다.
徑爲弦

☞ 역자 주: 반원의 원주각은 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형을 생각할 수 있고 그때 지름이 곧 현이 된다.



〔1-2〕
구와 고를 알고 현을 구하는 방법
〔구와 고를 각각 제곱하여 합한 다음 제곱근을 구하여 현을 구한다.〕
구와 현을 알고 고를 구하는 방법
〔구를 제곱하여 현의 제곱에서 뺀 다음 제곱근을 구하여 고를 구한다.〕

4) 직사각형의 두 변 중 긴 것을 길이(長), 짧은 것을 너비(闊)라 한다.

고와 현을 알고 구를 구하는 방법
〔고를 제곱하여 현의 제곱에서 뺀 다음 제곱근을 구하여 구를 구한다. 이상의 세 그림5)과 세 풀이 방법은 모두 〈양휘산법〉에 나와있다.〕
句股求弦 〔句股各自乘幷而開方求弦〕
句弦求股 〔句自乘減弦自乘開方求股〕
股弦求句 〔股自乘減弦自乘開方求句○以上三圖三術幷出楊輝算法〕

구의 제곱과 고의 제곱을 서로 합하면 현의 제곱이다. 따라서 구와 고를 각각 제곱하여 합한 다음 제곱근을 구하면 현을 얻는다. 또 현의 제곱에서 구의 제곱을 뺀 나머지는 고의 제곱이다. 따라서 구를 제곱하여 현을 제곱한 것에서 뺀 다음 제곱근을 구하면 고를 얻는다. 현의 제곱에서 고의 제곱을 뺀 나머지는 구의 제곱이다. 따라서 고를 제곱하여 현의 제곱에서 뺀 다음 제곱근을 구하면 구를 얻는다. 〔무릇 현의 제곱이 넓이의 2배라고 하는 것은 정사각형인 경우이다. 만약 직사각형일 때에는 현의 제곱에서 직사각형의 넓이의 2배를 빼서 이때 나머지가 있으면 이것은 직사각형의 길이에서 너비를 뺀 수6)의 제곱이다.〕
句冪股冪之相併卽弦冪也 故句股各自乘併而開方求弦 又如弦冪內減句冪餘卽股冪也 故句自乘減弦自乘開方求股 弦冪內減股冪餘卽句冪也 故股自乘減弦自乘開方求句 〔凡弦冪卽積數之倍此以方積言 若直積則弦冪內除倍積之數又有餘數 是爲較冪〕

☞ 역자 주: 오늘날의 피타고라스의 정리에 해당하는 구고술에 대한 설명이다. 즉 구를 a, 고를 b, 현을 c라 하면 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$a^2+b^2=c^2$$
$$a=\sqrt{c^2-a^2}$$

또한 현의 제곱이 넓이의 2배라는 것은 기하학적으로 대각선을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 원래 정사각형의 넓이의 2배임을 뜻하므로 정사각형인 경우에 해당하며, 다음과 같이 식으로 확인할 수 있다.

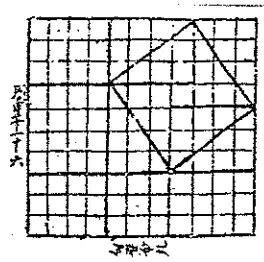
$$c^2-2ab=a^2+b^2-2ab$$
$$=(a-b)^2$$

5) [1-1]의 직적・방적・원적 그림을 말한다. 양휘의 <속고적기산법>에 있다.
6) 즉 고에서 구를 뺀 수이다.

$$=0$$
$$a=b$$

더욱이 직사각형의 경우에는 $(a-b)^2=k\neq 0$이므로 나머지가 곧 구와 고의 차의 제곱이다.

〔1-3〕 구3 고4 현5의 그림 (句三股四弦五之圖)
〔직사각형의 넓이. 이 구고현은 일정한 비율이 있고 아울러 모두 소수점 이하가 없다.7) 따라서 정률이라 한다. 나머지도 이와 같다.〕



구3, 고4, 현5이다.
구고화는 7, 구현화는 8, 현화화는 12이다.
구고교는 1, 구현교는 2, 고현교는 1,
고현화는 9이다.
직사각형의 넓이는 12이다.
가는 선 안에 굵은 선을 써서 별도로 각각의 경계를 나타냈다. 〔다음 그림도 같다.〕
〔直積○此句股弦有定率並無零故曰定率○餘倣此〕
句三股四弦五
句股和七 句弦和八 弦和和一十二
句股較一 句弦較二 股弦較一 股弦和九
直積一十二
細線內別用大線以表各界 〔下圖同〕

☞ 역자 주: 화(和)는 합, 교(較)는 차를 뜻한다. 구, 고, 현 3개의 요소가 있으므로, 화와 교는 다음과 같이 각각 3가지씩 있게 된다.
구고화 구현화 고현화
구고교 구현교 고현교
더불어 현과 구고화(구+고)의 합을 현화화라 한다.

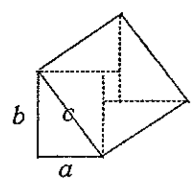
중심의 왼쪽에 있는 직각삼각형은 넓이가 6이고 구는 3, 제곱은 9, 고

7) 3:4:5의 정수비임을 뜻한다.

는 4, 제곱은 16이며 구와 고의 제곱의 합은 25, 즉 현의 제곱이다. 직각삼각형의 오른쪽에 있는 사선은 현이고 길이는 5이다. 현을 제곱하면 오른쪽의 큰 정사각형이며 넓이는 현의 제곱 25이다. 현의 제곱 안에는 직각삼각형이 넷 있고 넓이는 모두 24이다. 따라서 이 현의 제곱[8]의 중심의 넓이는 1이고 이것은 구고교의 제곱과 같다.

中心左半句股形 積六句三羃九股四羃一十六 句股羃幷二十五卽弦羃 句股右邊斜線弦五 自弦右邊大方形弦羃二十五 弦羃內容句股形四積二十四 弦羃中心積一 卽句股較羃

☞ 역자 주: 본문 중 '중심의 왼쪽에 있는 직각삼각형'과 '오른쪽의 큰 정사각형'은 오른쪽 그림의 직각삼각형과 정사각형을 말한다. 구를 a, 고를 b, 현을 c라 하면, 중심의 넓이는 큰 정사각형(현의 제곱)에서 네 직각삼각형의 넓이를 뺀 것이므로 다음이 성립한다.



$$c^2-4\times\frac{ab}{2}=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$$

즉, 중심의 넓이는 구고교의 제곱이다.

[1-4] 구3 고3 현4 영[9] 그림(句三股三弦四零之圖)

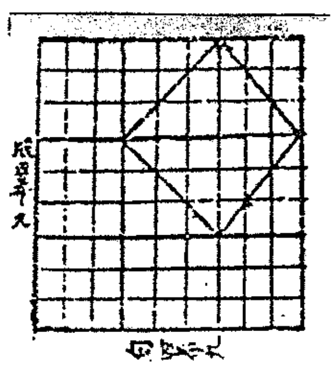
[정사각형의 넓이. 이것은 근사적으로 정한 것이다. 나머지도 이와 같다.]

가령 구3, 고3이면 이때 현은 4하고 소수점 이하 2426406 [그리고 끝이 없다. 73923164. 여기서 7은 위의 영 아래 있는 6과 같은 자리 수이다.]

[方積○此假立○餘倣此]

假如句三則股三是弦四零二四二六四空六

[不盡七三九二三一六四○此七與上文空下六同位]



8) 그림에서 큰 정사각형이다.

9) 소수점을 의미한다. 소수점 아래 수가 계속됨을 알 수 있다.

☞ 역자 주: 이 문제에서는 구와 고가 3으로 같은 경우에 현을 다음과 같이 구하였다.

$$\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=4.24264073923164$$

오늘날의 근사값 $\sqrt{18}=4.24264068711928$과 비교할 때 소수 여섯째 자리까지 일치하며 오차가 10^{-7}수준이라는 점을 통해 당시의 계산의 정확성을 추측하기에 충분하다.

정사각형에서 대각선을 구하는 방법은 직사각형에서 대각선을 구하는 것과 그 이론은 같다. 직사각형에서는 이미 아는 바와 같이 구의 제곱과 고의 제곱을 합하여 제곱근을 구하면 현을 얻는다. 바로 구와 고의 제곱의 합이 현의 제곱이므로 여기에서 현을 얻는 것이다. 만약 정사각형이면 역시 한 변을 제곱하여 이것을 2배하면 이것이 바로 구와 고의 제곱의 합이므로 현의 제곱이다. 따라서 제곱근을 구하면 현을 얻는다. 단, 직사각형에서 대각선을 구하는 방법으로 미루어보아 정사각형의 대각선을 구할 수 있는데, 이는 방5사7의 비율보다 더 정밀하다. 위에 있는 정사각형에서 구3이고 고3이면 각각을 제곱하여 더하여 18자이고, 제곱근을 구하면 현은 4자 영 2치 4푼 26406이고 더 있어 끝이 없다. 만약 방5사7의 비율을 쓰면 현은 4자하고 아랫자리가 2치로 끝난다. 개방법과 비교하여보면 이것은 너무 먼 근사값이다.

蓋方積求弦之法與直積求弦其理一也 直形旣以句羃股羃幷之開平方得弦 夫句股羃幷之則弦羃是以得弦 若方形亦以方面自之倍之 是爲句股羃幷爲弦羃之數 故開平方得弦 但依直積求弦法推而通之 可求方弦 其視方五斜七之率最精且密矣○如上文方積句三股三 各自之幷之得一十八尺 開平方得弦四尺零二寸四分二六四空六又有不盡 若用方五斜七 則弦四尺零止二寸 以課開方不及遠矣

☞ 역자 주: 방5사7의 비율에 의하면 한 변이 3일 때 대각선은 $3\times\frac{7}{5}=4.2$로, 위에서 제곱근으로 구한 4.24264073923164 보다 훨씬 대략적인 값이다.

[1-5] 이외에도 또 구8 고15 현17의 비율인 직각삼각형이 있다. [역시 모두 소수점 이하가 없다. 구의 제곱은 64이다. 고의 제곱은 225이다. 서로 합하면 현의 제곱인 289이다. 구고화는 23이다. 구현화는

25이다. 현화화는 40이다. 구고교는 7이다. 구현교는 9이다. 고현교는 2이다. 고현화는 32이다. 직사각형의 넓이는 120이다.]
此外又有句八股一十五弦一十七之率 〔亦並無零○句羃六十四 股羃二百二十五 並之則弦羃二百八十九○句股和二十三 句弦和二十五 弦和和四十 句股較七 句弦較九 股弦較二 股弦和三十二 直積一百二十〕

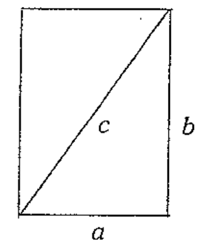
〔1-6〕 직률
장과 평[10]을 서로 곱한 것을 적(넓이)이라 하고, 자기 자신에 자기를 서로 곱하면 멱(제곱)이라 한다. 장과 평을 서로 합한 것은 화라 하고, 장과 평을 서로 뺀 것은 교라 한다. 〔교와 차는 같은 뜻이다. 교는 같지 않다는 뜻이다.[11] 차는 등급의 차이다. 음은 초매절이다. 교와 같다.〕 평으로 장을 나눈 것을 소장이라 하고, 장으로 평을 나눈 것을 소평이라 한다. 〔이 여섯 구절은 〈계몽〉의 총괄에 나와 있다.〕
長平相乘曰積 自相乘之曰羃 長平相幷曰和 長平相減曰較 〔較與差同義 較不等也 差等差也 初賣切較也〕 平除長爲小長 長除平爲小平 〔此六句出啓蒙摠括〕

장〔고〕과 평〔구〕을 각각 제곱하여 합하면 현의 제곱이다. 직사각형의 넓이를 2배하여 위의 수에서 빼면 나머지는 교의 제곱과 같고 이것의 제곱근을 구하면 장과 평의 차이다. 작은 변의 제곱과 큰 변의 제곱의 합은 역시 현의 제곱이다. 소평[12]에 큰 변의 제곱을 곱하면 역시 직사각형의 넓이이다. 장과 평의 합을 제곱한 것은 직사각형의 넓이의 4배와 교의 제곱의 합과 같으므로, 직사각형의 넓이를 4배하여 이것을 장평의 합의 제곱에서 뺀 나머지의 제곱근을 구하면 교를 얻는다. 교에 화를 더하여 2로 나누면 장을 얻고 장에서 교를 빼면 평을 얻고, 교에 화를 더하면 장의 2배이고, 화에서 교를 빼면 평의 2배이다. 장의 2배와 평의 2배를 서로 곱하면 직사각형의 넓이의 4배이다.
長〔股〕平〔句〕各自之幷爲弦羃 以直積倍之減於上位 餘爲較羃 開平方得長平

10) 즉, 직사각형의 길이와 너비이다. 이어 나오는 소장(장/평), 소평(평/장)과 관련지어 그대로 옮긴다.
11) 교는 차와 마찬가지 의미이지만, $b-a>0$, 즉 $a \neq b$인 것으로 보인다.
12) 본문에는 작은 변의 제곱으로 되어 있지만 의미상 소평으로 고쳐야 옳다.

較 小方大方共積亦爲弦羃 小方[13]乘大方亦爲直積 求較同長平和自之卽四段直積 一段較羃也列積四之減於上位餘開平方得較 較加和半之得長 長內減較得平 較加和得二長 和減較得二平 二長二平相乘爲四段直積

☞ 역자 주: 오른쪽 직사각형과 같이 너비(구)를 a, 길이(고)를 b, 대각선(현)을 c라 할 때 다음이 성립한다.



1. $c^2-2ab=a^2+b^2-2ab=(b-a)^2$
2. 소평$=\dfrac{a}{b}$이므로 $\dfrac{a}{b}\cdot b^2=ab$, 즉 직사각형의 넓이이다.
3. $b-a=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$
4. $\dfrac{(b-a)+(b+a)}{2}=b$
5. $b-(b-a)=a$
6. $(b-a)+(b+a)=2b$
7. $(b+a)-(b-a)=2a$
8. $2b\times 2a=4ab$, 즉 직사각형의 넓이의 4배이다.

〔1-6-1〕 지금 직사각형의 밭이 있다. 구는 4자이고 고는 9자이다. 현은 얼마인가?
今有直田句四尺股九尺 問弦幾何

답: $9\frac{16}{19}$자〔분은 거성이다. 넓이는 36자이다. 넓이의 두 배 외에 또 교의 제곱이 25자임을 안다. 제곱근을 구하면 5자이다.〕
答曰九尺一十九分尺之一十六 〔分去聲○積三十六尺○二積外又有較羃二十五尺 開方得五尺〕

구와 고의 제곱을 서로 합하면 97을 얻는다. 〔현의 제곱이다.〕 이것을 실로 하여 제곱근을 구한다. 〔염법은 1로 한다.〕 9자를 얻으면 실의 나

13) 方을 平으로 고쳐야 한다.

머지는 16자이다. 즉 제곱근이 끝이 없는 수이므로 방법을 2배하고 여기에 아래의 법수[염법]를 더하면 19가 되어 이것을 분모로 하고 실의 나머지 수 16을 분자로 하면 된다. [<양휘산법>에 말하기를, 제곱근이 끝이 없는 수는 분자로 하여 분수를 만든다. 방법은 다음과 같다. 우수를 배하여 염에 합하고 한 자리 물리친다. 제곱근에서는 2배, 세제곱근에서는 3배하여 아래 법의 수에 더하여 셈한 것을 모두 분모로 하고 앞에 이야기한 나머지 수를 분자로 하여 분수를 만든다.]
併句股冪得九十七[弦冪] 爲實開方[一爲廉法] 得九尺餘實一十六尺 卽開方不盡之數二因方法添八下法[廉法] 共一十九爲分母 餘實十六尺爲分子合問 [楊輝算法曰開方除不盡之數 命爲分子 術曰倍隅數入廉一退 平方二因立方三因幷入下法 算總爲分母 以命分子之數]

☞ 역자 주: 제곱근이 딱 떨어지지 않는 경우, 정수 이하 부분을 분수로 처리하는 방법에 대해 알 수 있다. 즉 제곱근의 정수 부분 이하를 $\dfrac{\text{실의 나머지}}{\text{방법}\times 2+\text{염법}}$로 나타낸다. 예컨대 97의 제곱근을 구하는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{lll} 1 & 0 & -97 \\ \hline & 9 & 81 \quad (\,9 \\ 1 & 9 & -16 \end{array}$$

여기서 상 9를 얻고, 방법이 9, 염법이 1, 실의 나머지가 16이므로 9 이외의 부분은 $\dfrac{16}{9\times 2+1}=\dfrac{16}{19}$이 된다.

이것을 다음과 같이 생각할 수 있다. a의 제곱근을 구하기 위해 $x^2-a=0$을 푼다. 초상을 α라 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{lll} 1 & 0 & -a \\ \hline & \alpha & \alpha^2 \quad (\,\alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2-a \\ \hline & \alpha & \\ 1 & 2\alpha & \end{array}$$

여기서 $x^2+2\alpha x+(\alpha^2-a)=0$의 해인 차상을 β라고 하면 $0<\beta<1$이므로, 두 점 $(0,\ \alpha^2-a)$와 $(1,\ 1+2\alpha+\alpha^2-a)$를 지나는 직선 $y=(1+2\alpha)x+(\alpha^2-a)$의 x

절편 $x=\dfrac{a-\alpha^2}{1+2\alpha}=\dfrac{r}{1+2\alpha}$을 β로 한 것이다. 즉 다음과 같다.

$$\sqrt{a}=\sqrt{\alpha^2+r}\fallingdotseq\alpha+\frac{r}{2\alpha+1}$$

따라서 97의 제곱근을 다음과 같이 구한다.

$$\sqrt{97}=\sqrt{9^2+16}\fallingdotseq 9+\frac{16}{2\times 9+1}=9\frac{16}{19}$$

[1-6-2] 지금 직사각형의 밭이 있다. 구와 현14)은 앞의 문제와 같다. 고는 얼마인가?
今有直田句弦上同 問股幾何

답: 9자
答曰九尺

현을 가분수로 고쳐, 즉 통분내자(가분수로 고쳐 분자를 취함)하여[내는 납과 통한다. 다른 책의 통분납자와 같다.] 얻은 분자를 제곱한다. 분자를 분모에서 뺀 나머지를 분자에 곱하여 위의 수에 더하여 왼쪽에 놓아두자. 다시 분모를 제곱하면 361이고 이것을 구의 제곱에 곱하여 얻은 수를 왼쪽에 놓아둔 수에서 빼면 나머지가 29241이다. 이것을 실로 하고 361을 염으로 하는 평방을 풀면 고를 얻는다. [<양휘산법>에 말하기를, 제곱수를 다시 구하는 환원술은 다음과 같다. 길이의 정수 부분을 분모와 곱하여 분자에 합하고 제곱하여 위에 놓는다. 분자를 분모에서 뺀 나머지를 분자에 곱하여 얻은 수를 위의 수에 더하여 실로 한다. 분모를 제곱하여 법으로 하여 나누면 제곱수를 얻는다. 실을 법으로 나눈다.
弦通分内子[内與納通] 自之分子 減分母餘乘分子加入上位寄左 又以分母自乘三百六十一 乘句冪得數以減寄左 餘二萬九千二百四十一爲實 以三百六十一爲廉 開方得股 [楊輝算法曰 再求積數還元術曰 置方面全步以分母通之倂入分子自乘於上 又以分子減分母餘以分子乘之得數倂入上位爲實 商除還

14) 현을 근사값으로 생각하는 것이다. 이후 문제에서 근사값으로 구한 데이터를 다음 문제에서 이용할 때 이와 같이 생각한다.

元無此一段以分母自乘爲法 實如法而一]

☞ 역자 주: 풀이의 절차를 요약하면 다음 식으로 표현된다.

$$\sqrt{\frac{187^2+(19-16)\times16-4^2\times19^2}{19^2}}$$

여기서 $\frac{187^2+(19-16)\times16}{19^2}$은 현의 제곱을 나타낸 것으로, 제곱근의 근사값으로부터 원래 수인 제곱을 찾은 것이다. 그런데 <양휘산법>에서 설명하는 이 방법은 제곱근의 근사값 $\alpha+\frac{a-\alpha^2}{2\alpha+1}$의 분자와 분모를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있고, 이를 변형시키면, 결국 (분자)$+\alpha^2$로 귀착되는 번거로운 방법임을 알 수 있다.

$$a=\frac{(\alpha\cdot\text{분모}+\text{분자})^2+(\text{분모}-\text{분자})\cdot\text{분자}}{\text{분모}^2}$$

$$=\frac{\alpha^2\text{분모}^2+2\alpha\text{분모}\cdot\text{분자}+\text{분자}^2+\text{분모}\cdot\text{분자}-\text{분자}^2}{\text{분모}^2}$$

$$=\frac{\alpha^2\text{분모}^2+(2\alpha+1)\text{분모}\cdot\text{분자}}{\text{분모}^2}$$

$$=\frac{\alpha^2\text{분모}^2+\text{분모}^2\cdot\text{분자}}{\text{분모}^2}$$

$$=\alpha^2+\text{분자}$$

실제로 $\sqrt{a}=\sqrt{\alpha^2+r}\fallingdotseq\alpha+\frac{a-\alpha^2}{2\alpha+1}$이므로 정수 이외의 부분을 분수로 나타낸 것에서 (분자)$+\alpha^2$이 곧 구하는 a이다. 따라서 이 문제에서 현의 제곱 $a=16+9^2$이고 구하는 고는 $\sqrt{(16+81)-4^2}=9$로 구할 수 있다.

별해: 분모를 제곱하여 실수에 곱하고 이것의 제곱근을 구한다. 또 분모를 제곱하여 실을 나누고 이것의 제곱근을 구한다. 이것이 더욱 빠른 방법이다.
又術以分母冪乘實數平方開之 又以分母冪除實平方開之 尤捷

〔1-6-3〕 지금 직사각형의 밭이 있다. 고와 현은 앞의 문제와 같다. 구는 얼마인가?
今有直田股弦上同 問句幾何

답: 4자
答曰四尺

현을 가분수로 고쳐 분자를 제곱하고 분모에서 분자를 뺀 나머지를 분자에 곱한 수를 더하여 왼쪽에 놓아둔다. 분모를 제곱하여 고의 제곱에 곱하여 얻은 수를 왼쪽에 놓아둔 수에서 빼면 나머지가 5771[15]이다. 이것을 실로 한다. 〔나머지 풀이 방법은 앞의 문제와 같다.〕
弦通内自之 分子減分母餘乘分子併之寄位 以分母冪乘股冪得數以減寄位 餘五千七百六十一[16]爲實 〔餘同上法〕

〔1-6-4〕 지금 직사각형의 밭이 있다. 구는 4자, 현은 9자이다. 고는 얼마인가?
今有直田句四尺弦九尺 問股幾何

답: $8\frac{1}{17}$자
答曰八尺一十七分尺之一

구의 제곱을 현의 제곱에서 뺀 나머지 65의 제곱근을 구하면 고를 얻는다.
句冪去減弦冪 餘六十五爲實 開方得股

☞ 역자 주: $\sqrt{9^2-4^2}=\sqrt{65}=\sqrt{8^2+1}\fallingdotseq8+\frac{1}{2\times8+1}=8\frac{1}{17}$

15) 5776으로 고쳐야 한다.
16) 이것은 틀렸다. 五千七百七十六으로 고쳐야 한다.

〔1-6-5〕 지금 직사각형의 밭이 있다. 구와 고는 앞의 문제와 같다. 현은 얼마인가?
今有直田句股同上 問弦幾何

답: 9자
答曰九尺

고를 가분수로 고쳐 분자를 제곱하고 분자를 분모에서 뺀 나머지를 분자에 곱하고 위의 수에 더하여 옆에 놓아둔다. 또 분모의 제곱을 구의 제곱에 곱하여 옆에 놓아둔 수에 더하여 실로 한다. 분모의 제곱 289를 염으로 하는 평방을 풀면 현을 얻는다.
股通内自之 又子減母餘乘子併之寄位 又以母羃乘句羃加入寄位爲實 以母羃二百八十九爲廉 開方得弦

☞ 역자 주: 고는 앞 문제의 근사값으로 다루어 그 제곱수는 [1-6-2]의 역자 주에서 설명한대로 $1+8^2=65$로 구한다. 따라서 다음과 같다.

$$\sqrt{(1+8^2)+4^2}=\sqrt{65+4^2}=9$$

〔1-6-6〕 지금 직사각형의 밭이 있다. 고와 현은 앞의 문제와 같다. 구는 얼마인가?
今有直田股弦上同 問句幾何

답: 4자
答曰四尺

고를 가분수로 고쳐 분자를 제곱하고 또 분모에서 분자를 뺀 나머지를 분자에 곱하여 더한 다음 왼쪽 놓아두자. 분모를 제곱하여 현의 제곱에 곱한 것을 왼쪽에 놓아둔 것에서 빼면 나머지가 4624이고 이것을 실로 한다. 〔나머지 방법은 앞의 문제와 같다.〕
股通内自之 又子減母餘子併之寄位 以母羃乘弦羃減去寄位 餘四千六百二十四爲實 〔餘同上法〕

〔1-6-7〕 지금 직사각형의 밭이 있다. 고는 5자이고 현은 7자이다. 구는 얼마인가?
今有直田股五尺弦七尺 問句幾何

답: $4\frac{8}{9}$자
答曰四尺九分尺之八

현의 제곱에서 고의 제곱을 빼면 나머지는 24이다. 이것의 제곱근을 구하면 구를 얻는다.
弦羃内減股羃餘二十四爲實 開方得句

〔1-6-8〕 지금 직사각형의 밭이 있다. 구와 고는 앞의 문제와 같다. 현은 얼마인가?
今有直田句股上同 問弦幾何

답: 7자
答曰七尺

구를 가분수로 고쳐 분자를 제곱하고 또 분모에서 분자를 뺀 나머지를 분자에 곱하고 더하여 왼쪽에 놓아둔다. 구의 분모를 고의 제곱에 통하여 왼쪽에 놓아둔 수에 더하면 3969이다. 이것을 실로 하고 분모의 제곱 81을 염으로 하는 평방을 풀면 현을 얻는다. 〔본문에서 구의 분모를 고의 제곱에 통한다고 한 것은 구의 분모를 제곱하여 고의 제곱에 곱한다는 것과 같은 뜻이다.〕
句通内自之 又子減母餘乘子幷之寄位 句母通股自之 加入寄位 共三千九百六十九爲實 以分母羃八十一爲廉開方得弦〔句母通股尺自之 卽母羃之乘股羃也 同義〕