# 현대수학입문 읽을거리

<정보와 구조>

"수학이란 무엇인가"라는 질문을 하면 많은 대답을 들을 수 있을 것이다. 그러나 조금 더 구체적이고 깊이 있는 생각을 하여 보면 다음과 같은 몇 가지 생각을 할 수 있다. 우선 수학을 사용하는 데는 두 가지 목표가 있다. 그 하나는 수학 및 과학의 이론을 이해하고 발전시키는 것이고, 또 하나는 자신의 (과학적인) 생각을 남에게 전하고 또 남의 생각을 받아들이는 것이다. 이 두 가지는 전혀 다른 것처럼 보이지만 실제로는 매우 밀접한 관련을 맺고 있다. 우리는 이러한 목표를 달성하려면 어떤 자세를 가져야 하는가에 대하여 생각해 보고자 한다.

우선 수학을 이해하고 발전시키는 것이 어떠한 것인가에 대하여는 누구나 공통된 생각을 하고 있으리라고 생각한다. 이 문제는 조금 뒤로 미루어 놓자. 이보다 먼저 수학적인 내용을 다른 사람에게 전하고 또 받는 과정에 대하여 생각하여 보자. 이러한 교류를 간단히 정보교환 또는 의사전달, 의사소통(communication)이라고 부를 수 있다. 이러한 교류에서 전달된다고 생각되는 대상을 정보(information)라고 부르기로 하자.[1] 그러면 사람들은 전하고자 하는 정보를 어떻게 전달하는가? 물론 손짓발짓, 음성, 문자, 그림 등등 여러 방법이 있다.[2] 이 때 우리가 관심이 있는 것은 구체적으로 전달되는 매개체(기호, 음성, 그림) 등이 아니다. 이 보다는 이러한 매개체가 전달하려고 하는 내용(?) 또는 의미와 관련된 것이 중요하다고 생각된다. 그러면 정보(내용, 의미)는 어떻게 전달되는가? 그러나 우리는 정보과학 분야에 발을 들여놓지 않고 단순히 수학적인 사고만을 통하여 정보의 입장에서 수학의 방법론을 생각해 보고자 한다.

위에서 제기한 질문 "매개체를 통하여 정보는 어떻게 전달되는가?"라는 질문에 어떠한 답을 줄 수 있는가? 우선 음성은 물론 손짓발짓이나 그림도 모두 언어를 전달한다고 생각된다. 혹시 이것들이 말과는 다른, 그 자체로 효율적인 방법이라고 주장한다면 그것도 좋다. 그러나 그러한 방법도 어떠한 매개체를 통하여 정보를 전달한다는 점에서는 언어와 크게 다르지 않다. 즉 이러한 모든 방법들은 단순히 조금 더 일반적인 언어라고 생각하여도 크게 문제는 없어 보인다. 문제는 언어가 어떻게 말하고자 하는 내용을 전달하는가 하는 문제이다.

이를 잘 이해하기 위하여 다음과 같은 생각을 하여 보자. 우리가 눈앞에 있는 빨간 자동차를 보면서 "빨갛다"라고 말을 하면 그 말을 듣는 사람도 그 말의 뜻을 알고 빨갛다는 생각을 한다. 이때 전달된 것은 물질적으로는 공기를 통하여 전달된 음파이고, 이 복잡한 음파는 말하는 사람마다 조금씩은 그 파형이 다르겠지만 듣는 사람은 그 차이를 무시할줄 알아서 똑같은 "빨갛다"라는 말로 알아듣는다. 즉 복잡한 음파에서 간단한 기호로 전환할줄 안다는 것이다. 따라서 실제로 전달된 것은 어쨌든 "빨갛다"라는 기호 언어이다. 빨갛다는 기호는 빨간 색과 연결되어 있고 따라서 이 기호가 연상되면 빨간 색을 떠올리는 것이다. 이것은 옳다.

그러면 말을 한 사람은 자신이 전달하고 싶은 생각을 제대로 잘 전달한 것인가? 이 사실을 확인하기 위하여 말을 한 사람은 무엇을 하여야 하는가? 말을 한 사람은 말을 들은 사람이 자기와 똑같은 개념으로 "빨갛다"는 말을 사용하고 있는가를 확인하고 싶다. 말은 잘 들었지만 그 말을 듣고 나랑 다른 생각을 한다면 내가 전달하고자 하는 것이 제대로 전달된 것이 아닐 것이기 때문이다. 이제 이 사람은 이 사실을 확인하기 위하여 상대에게 빨간 사과를 보여주며 색깔이 어떻다고 하는가를 확인하려 할 것이다. 그래서 상대가 사과가 빨갛다고 하고 파란 사과는 파랗다고 하면 이 사람이 나와 같은 생각을 하고 있구나하고 안심하게 될 것이다. 그러나 조금 의심이 많은 사람은 다

1) 여기서 정보가 무엇인가는 정확한 정의를 내리지 않는다.

2) 이러한 내용의 수학적 능률에 대하여 공부하는 것은 통상 정보과학(information science)라고 불리며 수학의 한 분야라고 생각되고 있다.

른 생각을 할지도 모른다. 상대방이 빨간 사과를 보고 빨갛다고 하기는 하지만 과연 상대방이 빨간 사과를 진짜로 빨갛게 보고 있기는 한가하는 생각이 들지도 모른다.

이제 사고 실험의 단계에 접어들었다. 혹시라도 어떤 사람이 (색맹이나 색약처럼) 눈에서 뇌까지의 어떤 부분에 이상이 있어서 빨간색을 보면 파랗게 보이고 파란색을 보면 빨갛게 보인다고 생각하여 보자. 그 사람은 빨간 사과를 보면 뭐라고 할 것인가? 그 사람은 빨간 사과를 보면 파랗게 보일 것이다. 그러나 그 사람은 그 파란(실제로는 빨간)색을 볼 때마다 사람들이 빨갛다고 하니까 그 사람도 그게 빨간색인줄 알고 살고 있다. 따라서 이 사람에게 빨간 사과를 보여주면 파랗게 보이지만 말은 “빨갛다”고 할 것이다. 이제 위에서 이야기한 사람은 상대방이 빨간 사과를 보고 빨갛다고 하면 상대방도 나와 같은 생각을 하고 있다고 안심할 수 있는가? 더 나아가서 혹시라도 내가 그런 이상한 사람이라서 내가 빨갛다고 생각하는 색이 다른 사람들은 모두 파랗다고 생각하는 색인데 나만 그런 줄 모르고 그냥 빨갛다고 부르면서 살고 있는 것은 아닌가? 혹시 그런지 아닌지는 어떻게 하여야 알아낼 수 있는가?

**문제.** 이 문제를 해결할 수 있는가? 왜 그런가?

이러한 문제로 고민하여 본 일이 있는 사람도 있을 것이다. 그러나 이것을 확인할 수 있는 방법은 별로 없어 보인다. 그렇다면 우리는 과연 정보를 제대로 전달하고 있는 것인가? 말로는 “빨갛다”고 전달하면서도 실제로 전달된 내용이 “파랗다”는 것이라면 문제는 크다. 실제 상황에서는 아무런 문제도 일으키지 않겠지만, 이런 말을 믿고 사용할 수 있는가 하는 문제가 제기된다.[3]

수학에서도 이런 생각을 많이 해본 것 같다. 이에 대한 수학의 입장은 이런 것은 아무런 문제가 안 된다는 것이다. 상대방이 혹시 빨간 것을 파랗다고 생각하며 빨갛다고 이야기하더라도 나하고 사이에 문제만 생기지 않으면 된다는 입장이다. 이런 입장은 처음부터 그렇지는 않았을 것이다. 그러나 이러한 문제에 많이 부딪혀 본 결과 상대방의 진짜 생각을 알아낼 길이 없다는 것을 알았을 것이고, 그래서 우리가 최대한 알 수 있는 것은 무엇일까를 생각한 결과일 것이다.

이제, 실제로 전달되는 것은 무엇인가라는 의문이 생긴다. 전달되는 것은 빨간색이라는 말(음성)이지만 이것은 진짜로 전달하고 싶은 것이 아니다. 이것은 빨간색이라는 말 대신에 red라는 말 또는 rouge, rot, 赤이나 あかい라는 말을 써 보아도 공통으로 전달되는 무엇이 있다는 생각을 하면 알 수 있다. 이 공통으로 전달되는 것이 빨갛다는 말도 아니고 빨간색이라는 그 느낌 자체도 아니라면, 얼핏 무엇이 전달되고 있는지를 알 수 없다.

그러나 이 상황을 자세히 살펴보면 그 상황 안에 답이 있다는 것을 알 수 있다. 이 빨강과 파랑을 바꿔 느끼는 사람은 어째서 아무 문제도 없이 잘 살고 있는 것인가? 왜냐하면 이것을 바꿔 느껴도 실제로 아무 문제도 일어나지 않기 때문이다. 이 말은 미술 선생님이 빨간색을 칠해라 하시면 자기는 말은 빨간색이라고 하면서 파랗게 보이는 물감을 칠할 것이지만 이 파랗게 보이는 물감은 다른 사람들에게는 빨갛게 보이는 빨간 물감이니까 아무도 무슨 일이 잘못되었는지 모른다. 미술 선생님이 빨간색과 노란색을 섞으면 무슨 색이 되는가를 물으면 이 사람은 파란색과 노란색이 섞여서 녹색이 된 것을 바라보면서 빨간색과 노란색을 섞은 것은 주황색이라고 대답할 것이다.(물론 이 사람에게는 녹색과 주황색도 뒤바뀌어 보일 수밖에 없다.)

**문제.** 이 사람이 빨간색과 파란색만 뒤바뀌어 보이고 다른 모든 색은 제대로 보인다면 어떻게 이 사실을 알아낼 수 있는가?

---

3) 혹시라도 텔레파시와 같이 어떠한 느낌을 매개체가 없이 그대로 전달할 수 있는 방법이 있다면 이것은 여기서는 논외이다. 우리는 언어와 같은 구체적인 방법으로 전달되는 정보에 대한 이야기이다. (실제로 텔레파시의 경우도 우리와 같은 의미에서 자신의 생각이 제대로 전달되었는가를 확인할 수 있는 방법은 없어 보인다.)

이제 알 수 있는 사실은 우리가 빨간색과 파란색을 구별해서 사용할 때는 정말로 색이 구별되고, 즉 색맹이 아니고, 그 색들이 다른 모든 것과 갖는 관계가 같으면 되지 보이는 색이 진짜로 빨간색이냐 파란색이냐는 문제가 되지 않을 것 같다는 것이다. 이제 답을 알 수 있을 것 같다. 우리가 빨간색을 가리키고 빨간색이라고 부르며 서로 의사소통을 할 때 전달되는 것은 빨간색과 다른색과의 관계를 지칭하는 내용뿐이라고 생각된다. 우리는 이 사과가 빨갛다고 이야기할 때는 내가 보며 느끼는 빨갛다는 느낌에 대하여 이야기하지만, 실제로 전달되는 내용은 이 사과의 색은 저 자동차의 색과 같고, 빨간색과 노란색을 섞으면 주황색이 되는 '그런 색'이라는 내용이지, 이 사과에서 진짜로 내가 느끼는 그 빨간 느낌은 전달되는지 알 수가 없다는 것이다.[4)]

조금 더 대상을 넓혀 보자. 색깔은 우리가 1차적으로 보고 느끼는 것에 대한 개념이지만 더 복잡한 개념들도 근본적으로 마찬가지라는 사실을 느낄 수 있다. 예를 들어 어떤 놀라운 사실을 경험할 때 우리는 놀라움을 한마디 말로 표현하거나, 놀라움의 정도를 길게 설명할 수도 있고 또 시(詩)를 써서 그 놀라움을 글로 나타낼 수도 있다. 이러한 작업을 통하여 우리는 우리의 느낌을 전하려고 노력하고 있지만 전달된 내용에 대하여 확인할 수 있는 것은 단순히 전달된 내용이 주변 정황과 갖는 관계에 불과하다. 즉 이 이야기를 처음 들을 때 나와 비슷하게 놀란다는 사실이 같고 그 놀라움이 얼마나 기분 좋은 일인가 또는 기분 나쁜 일인가, 너무 놀라서 손바닥에 땀이 나는가 등등 외적인 많은 부분을 비교하여 볼 수는 있지만 그의 놀라움의 느낌이 내가 느끼는 그 느낌과 얼마나 비슷할까 하는 것은 전혀 알 수가 없다. 즉 우리가 하는 이야기들은 모두 우리가 본질이라고 생각하는 것과는 관계가 없는 이야기라는 것이다.

이제 다시 수학으로 돌아가서 이야기 하여 보자. 우리는 처음 수학을 배울 때부터 지금까지 항상 말과 그림 등, 일반적인 언어를 통하여 의사소통을 하여 왔다. 그러한 언어를 쓰면서 전달되는 것이 우리가 수나 공식 나아가서는 이론을 이해하고 느끼는 점 바로 그것이 아니라면 우리는 도대체 무엇을 하고 있는 것이고 이렇게 해서 공부하는 수학이란 무엇인가? 이러한 질문은 매우 철학적인 질문이다. 우리가 전달하지도 않은 그 무엇을 느끼고 그것에 대하여 생각할 수 있는 능력이 사람에게 있는가? 그런 것은 정말로 전달되지 않는 것인가? 등등의 많은 질문이 있고 철학 나름대로의 답도 있겠지만 수학은 이런 부분을 답하려고 하지 않는다고 생각된다.

이러한 근본적인 문제를 해결하는 방법으로 수학은 '구조'라는 명쾌한(?) 답을 주었다. 즉 자동차를 모르는 사람에게 설명하기 위하여 가장 좋은 방법은 자동차를 보여주고 "이것이 자동차다"라고 말하는 것이지만,[5)] 이렇게 간단히 보여 줄 수 없는 개념이라면 설명이 필요하게 되며 이 때 설명하는 내용은 그 느낌 자체라기보다는 오히려 그의 주변과의 관계라는 것이다. 다시 산수(算數)에서 한 가지 예를 들어 보자.

1이라는 수의 뜻을 생각하여 보자. 누구나 하나 또는 한 개라는 것이 무슨 뜻인지 안다고 생각한다. 그러나 이것을 어떻게 설명할 수 있는가? 즉, 옆에 1이 뭔지 모르는 사람이 있다고 하고,[6)] 그 사람에게 그 뜻을 설명하려면 무슨 이야기를 해야 하는가? 이에 대한 대답을 이 1이 가지고 있

4) 이런 느낌은 아마도 전달되지 않을 지도 모른다. 이런 것은 요사이 여러 종류의 컴퓨터 모니터를 볼 때 모니터 종류가 다를 때마다 색감이 차이가 난다는 사실에서도 유추해 상상해 볼 수 있다. 사람들도 각각 똑같은 기계처럼 작동하지 않을 가능성이 많아 보인다.

5) 그러나 이것만으로도 자동차에 대하여 느끼는 느낌을 제대로 전달하지 못한다. 실제로 자동차가 움직이는 것을 보여주고, 자동차에 태워주고, 운전을 가르쳐 주고, 자동차 정비법을 가르쳐 주고, 자동차를 만들 때의 모든 사항(엔진을 만드는 쇠의 강도와 성분, 각각의 나사를 조이는 힘의 강도, 각 센서의 감지 능력 등등)을 가르쳐주고, 심지어는 사고가 나서 자동차가 부서지는 것을 보여주어야만 '아! 자동차는 이런 것이구나' 하고 느끼게 된다.

6) 여기서 모른다는 말은 1이라는 글자를 모른다는 뜻이 아니다. 하나라는 개념이 없다는 뜻이다.

지 못하다. 1에 대하여 알려면 1을 아무리 들여다보아도 알 수 없다. 그 이유는 이 1의 자리에 '일'이나 '一'이나 'one'이나 '하나' 등등의 많은 기호를 바꾸어 써도 괜찮다는 것을 생각하면 1의 뜻은 1이라는 기호 자체가 가지고 있는 것이 아니라는 것을 알 것이다. 그러면 1의 뜻은 어디에 있는가? 이것은 1이라는 수(기호)가 다른 수 $0, 1, 2, 3, \cdots$ 등과 갖는 모든 관계 속에 있다. 조금 더 잘 이해하기 위하여 기호 1과 2를 바꾸어 쓰기로 하자. 즉, 1이 들어가야 할 자리에는 2를 쓰기로 하고 2가 들어가야 할 자리에는 1을 쓰기로 하자. 그러면 뭐가 어떻게 바뀌는가? 표현은 많이 달라지지만 우리가 근본적으로 생각하는 것에는 차이가 없다. 예를 들면 덧셈의 식들은 다음과 같이 써야 할 것이다.

$0+2=2, \quad 2+2=1, \quad 1+1=4, \quad 2+1=3, \ \cdots$

$0, 2, 1, 3, 4, 5, 6, \ \cdots$ 등등

이렇게 할 때 누구나 금방(?) '아하 2가 하나고 1이 둘이구나' 하고 깨달을 것이다. 어떻게 이것을 알 수 있는가? 덧셈의 모든 식들로부터 다른 것들과의 관계에서 유추해 낼 수 있기 때문이다.

이제 수학을 어떻게 만들어서 수학 이론을 설명하여야 할까를 알 수 있다. 수학에서 한 가지 이론을 설명하는 것은 마치 집을 지을 때 그 설계도를 가지고 설명하는 것과 같다. 설계도에는 집을 짓는데 필요한 모든 재료와 그 성질 그리고 그 재료들이 연결되는 방법들이 표시되어 있다. 벽돌을 쓰는 자리에는 빨간 벽돌이라고 표시되어 있고, 필요에 따라서는 벽돌의 강도가 표시되어 있다. 또 기둥을 세우는 자리에는 기둥이 그려져 있고, 기둥의 종류와 굵기 등이 나타나 있다. 이러한 설계도를 들여다보면 지어질 집이 어떨지를 알 수 있다. 이것은 지어진 집을 보는 만큼은 아닐지 몰라도 그 비슷하게 잘 이해할 수 있다. 이 때 벽돌 하나가 가지는 뜻은 벽돌 자체를 보고 아는 것이 아니다. 이 벽돌의 역할은 벽돌만 보아서는 알 수 없다. 오히려 이 벽돌이 들어가는 위치를 보고, 즉 주변의 다른 재료들과의 관계를 보고, 또 전체 집에서의 위치를 보고, 이 벽돌은 기둥을 받친다거나, 아니면 창틀을 치장한다거나 하는 그 쓰임새를 알게 된다.

이렇게 어떤 이론을 이루는 기본 재료들(건축 재료)을 설정하고 그들 사이의 기본적 관계(쌓는다거나 잇는다거나 하는)를 설정한 다음 이를 써서 이론 전체를 설명(설계도처럼)하는 방법을 공리적 방법론이라고 부른다. 그리고, 공리적 방법론으로 설명된 한 이론(설계도)의 내용을 구조(structure)라고 부른다. 공리적 방법론에서는 이론의 기본 재료와 관계를 무정의술어(undefined terms)라고 하여 그 뜻을 정의하지 않는다. 이러한 예로서 집합론(set theory)에서 쓰이는 '집합(set)', '속한다' 또는 '원소이다(be an element of)'가 있으며, 평면기하에서는 '점', '직선', 그리고 '점이 직선 위에 놓인다' 또는 '직선이 점을 지난다' 등이 있다. 20세기에 들어와 모든 수학을 공리적 관점에서 재정립한 것은 이러한 문제점을 해결하려는 노력이었다고 볼 수 있다. 이러한 공리적 방법론은 수학의 내용 자체를 전달하지 못한다는 단점을 가지고 있는 것처럼 보인다. 그러나 어떤 방법도 내용 자체를 전달하지는 못한다면 이것이 단점이라고 말할 수는 없다.

이러한 조금은 원치 않은 방향의 해결책은 의외로 생각 밖의 수확을 얻게 된다. 즉 설명하고자 하는 기본 개념은 제대로 설명을 하지 못하는 것처럼 보이지만 그 덕에 얻어진 이론을 매우 넓게 적용할 수 있게 된 것이다. 기하학의 예를 들자. 예를 들어 평면기하학은 점을 정의하지 못한다.(무정의술어이다.) 그러나 이렇게 만들어진 기하학은 평면과 같이 늘어놓아져 있다고 생각할 수 있는 모든 대상에 적용될 수 있는 이론이 된 것이다. 혹시라도 우리가 생각하는 점의 개념을 정확하게 전달할 수 있는 방법이 있었다면, 이를 써서 만들어진 이론은 꼭 그러한 점에게 밖에는 적용할 수 없었을 것이다. 그러나 점을 정의하지 않을 수 있었으므로 함수도 점으로 생각하여 $a+bx$라는 1차함수 전체는 평면처럼 생각하여 기하학을 적용할 수 있는 대상이 되는 것이요, 또 직선과 점의 역할을 바꾸어 직선을 점이라고 부르면서도 버젓이 기하학을 하는 (쌍대)사영기하학도 어렵지 않게 전개할 수 있는 것이다.

이것은 마치 설계도만 가지고 있으면 같은 집을 여러 채 지을 수 있는 것과 같다. 설계도를 쓰지 않고 집을 지어서 그 집이 어떤 이론이라고 하면 그 집만이 그 이론이 된다. 그러나 그 집의 구조(설계도)만을 뽑아서 이론이라고 부르면 이 이론을 많은 재료에 적용할 수 있다. 설계도에 주어진 강도만 넘는다면 벽돌 자리에 여러 강도의 벽돌을 바꾸어 넣을 수도 있고, 경우에 따라서는 빨간 벽돌 대신에 파란벽돌은 넣어도 된다. 즉 이론을 추상적으로 바꾸니까 이론이 허공에 뜬 것 같지만 그 대신 그 적용 범위가 넓어진다는 것이다.

이제 이런 이론을 들여다보면서 여러 곳에서 나타나는 수학적 개념들은 어떻게 찾고 이해해야 하는가에 대하여 이야기하여 보자. 중요한 수학적 개념들은 마치 집의 설계도에서 나오는 벽돌과 같은 기본재료도 있지만 이 벽돌을 몇 개 쌓아서 만든 벽난로와 같은 것들이다. 기본재료는 이미 언급했지만 벽난로는 어떤가. 벽난로가 어떤 개념인가는 설계를 통하여 이렇게 알게 된다고 생각된다.

우선 벽난로가 어느 부분인가를 알려면 그 주변과 비교하여 본다. 벽난로에 쓰는 벽돌을 정하면 그 벽돌을 벽난로 전체에 통일해서 사용하라고 요구되어있다던가, 그 옆의 벽에 쓰이는 재료를 한 번 바꾸면 벽은 모두 바뀌지만 벽난로 부분은 그대로 있다던가 하는 사실로부터 벽난로가 다른 부분과 구별되는 어떤 개념을 가지는 한 단위라는 것을 알게 된다. 이러한 벽난로가 나중에 집에서 불을 피우는 곳이라는 것은 이 집을 짓는 사람은 알 필요가 없다고 하자. 즉 이 이론에는 포함되어 있지 않다. 그러나 설계도에는 벽난로를 만드는 부분에 쓰이는 재료들은 열 내구성이 얼마 이상이 되어야 한다는 조건들이 적혀있을 것이고 이 내용만큼 우리는 이 구조 안에서 벽난로의 의미를 알게 되는 것이다.[7] 이러한 생각을 통하여 보면 우리가 어떤 구조에서 하나의 개념을 잡아내는 것은 그 구조가 가질 수 있는 많은 구체적인 예를 상상하여 보며 같은 구조 안에서 변화할 수 있는 가능성을 더듬어볼 때 마치 벽난로와 같이 하나의 단위를 이룬다던가 하여 변화하지 않는 성질 또는 따로 변화하는 성질을 찾아내는 것과 같다는 것을 알 수 있다.

**문제**. 일상적이고 구체적인 개념의 예를 하나 들어 그 개념이 어떠한 가능한 변화 안에서 변하지 않음으로써 그러한 개념을 형성하는가를 설명하여 보아라.

이제 수학에서 이러한 일이 일어나는 한 가지 예를 들어보자. 다음에 인용하는 글은 오래 전에 적었던 글을 여기에 옮긴 것이다.

[인용 시작]

한 직선의 점들에 또 다른 한 직선의 점들을 대응시키는 함수를 생각하자. 이것은 여러분이 초등학교에서부터 지금까지 수학에서 거의 매일 다루고 있는 대상이며 사실 이것 밖에는 배운 것이 없을 것이다. 이것을 보면 여러분은 우선 $y = f(x)$ 하고 쓸 것이다. 이것은 틀린 것이 아니다. 그러나 여러분은 분명히 $x$나 $y$가 수(number 즉 실수)라고 생각할 것이다. 여기는 문제가 있다. 직선 위의 점들은 수가 아니다. 여러분이 수라고 생각한다면 그것은 직선위의 점들을 항상 수와 대응시켜서(수를 이름으로 써서) 불렀기 때문일 것이다.

직선위의 점들은 항상 정해진 이름(=대응되는 수)이 있는가? 이런 생각을 해보면 금방 알수가 있다. 직선에 우리가 단위길이를 주고 눈금을 끊어나가기 전에는 '아니올시다' 이다. 이것도 직선 위에서 길이를 잴 수 있을 때라야 된다. 따라서 $x$, $y$에 숫자를 넣어 생각하는 것은 우리

7) 보통 사람들은 집을 짓는 사람이 또 집에서 사니까 집을 짓는 사람도 벽난로가 불을 피우는 장소라는 것을 알아야 한다고 생각하지만, 순수하게 집을 짓기만 하는 사람 또는 로봇이 있고 그 안에서 사는 사람은 따로 있다면 집을 짓는 사람이나 로봇은 벽난로의 사용은 몰라도 된다. 단지 사용할 수 있도록 필요한 모든 조건만 알면 되는 것이다. 이것만으로도 그들은 설계도에서 벽난로라는 개념의 존재를 찾아낼 수 있을 것이다.

직선들에 수를 찍어서 소위 '수직선'을 만든 후의 이야기이다. 수직선을 만드는 방법은 여러 가지가 있으니까 한 가지 함수 $y = f(x)$ 라도 수직선을 다르게 만들면 $f(x)$의 공식은 달라지게 마련이다.

진짜 예를 들자.

$y = x$ 라는 함수가 있었다. (이미 수직선이다) 그런데 어떤 사람이 $x$-축에서 단위길이를 원래길이의 두 배로 잡았다. 즉 이전의 2 자리가 이제는 1이 되고 말았다. 그랬더니 함수는 $y = 2x$가 된다. 함수가 변했는가? (이 물음은 두 직선 사이의 대응 관계가 변했느냐는 뜻이다.) 물론 변하지 않았고 단지 $x$-축 위의 점들의 이름만이 바뀌었을 뿐이다. 이렇게 함수의 영역에 숫자로 이름을 주는 것을 '좌표'를 준다고 하고, '좌표계'가 주어졌다고 한다. 한 함수라도 $x$나 $y$의 좌표계가 바뀌면 숫자로 나타내는 식은 달라진다.

이 긴 이야기의 핵심은?

1. 우리는 숫자를 써서 나타내는 것만을 계산할 수 있다는 것이다. 그러나 이것(계산)은 이름을 어떻게 주느냐에 따라 변한다.
2. 그러나 이렇게 숫자를 써서 말하고자 하는 것은 좌표를 바꿔도 변하지 않는 함수에 대한 이야기이다.

비극이 아닐 수 없다. 그러나 딴 방법은 없다.

이제 일차함수만 생각하자. (이것이 '선형대수'이다)

좌표를 정하고 $f$라는 함수를 표시하니 $f(x) = x$였다. 이 함수는 기울기 1만 알면 되는 함수이다. 그런데 아까처럼 좌표를 바꾸니까 기울기가 2가 되고 말았다. 그럼 기울기가 무슨 소용인가? 좌표만 바꾸면 무슨 기울기도 다 나올 텐데 $\cdots$ (0 만 빼고)

따라서 우리가 말하고 싶은 '변화율'은 이렇게 이야기 한다. 이런 좌표에서는 기울기가 1이다. 하지만 $x$-좌표를 (0 이 아닌) $a$배로 늘리면 기울기는 $a$배가 되고 $y$-좌표를 그렇게 하면 기울기는 $1/a$배가 된다.

여기서 '몇 배' 하는 부분의 설명은 언제나 그렇다는 것을 알 수 있을 것이다. "따라서 한번 이야기 하면 다시 할 필요가 없겠으므로 다 안다면 다시 이야기 하지 않는다"는 것이 선형대수의 바탕(basis)의 변환에 대한 정리이다.

즉 선형변환(Linear Transformation = 변수도 벡터이고 값도 벡터인 일차함수)은 좌표를 이러이러하게 잡을 때 (즉 basis를 이렇게 잡을 때)

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

로 표시 된다면 좌표(basis)를 이러이러하게(= $P$, $Q$를 써서) 바꾸면 새 좌표에서는

$$\vec{y} = QAP^{-1}\vec{x}$$

꼴로 표시된다는 정리이다.(여기서 $\vec{x}$ , $\vec{y}$ 는 벡터, $A, P, Q$ 등은 행렬이다.)[8)]

따라서 행렬을 하나 보면 그 행렬을 곱해서 함수(선형변환)가 나온다는 생각뿐이 아니라 이때 basis를 바꾸면 그 행렬이 어떻게 변할지도 항상 생각하고 있어야(최소한 생각해 낼 수 있어야) 한다. 그래야 그 함수를 진짜로 (어떤 경우에도 쓸 수 있게) 알고 있는 것이다.

[인용 끝]

8) 직선의 방정식의 경우에 $x$-좌표를 $a$배로 늘리고 $y$-좌표를 $b$배로 늘리자. 즉 새 좌표 $X, Y$가 점 $p$에서 $X(p) = ax(p)$이고 $Y(p) = by(p)$라고 하면, 원래 좌표에서 $y = mx$로 나타나는 직선은 새로운 좌표에서는 $Y = bma^{-1}X$이다.

그런 이유 때문에 선형대수학을 공부하게 되면 쉬운(!) 행렬을 제쳐놓고 추상적인 선형변환을 다루게 되고, 쉬운 $\mathbb{R}^2$를 제쳐놓고 2차원 벡터공간이라는 것을 정의하는 것이다.

공리적 방법론의 효시는 물론 유클리드의 원론(Elements)이다. 이미 2000년도 더 전에 이러한 방법론을 만든 것은 이러한 모든 것을 꿰뚫어본 것인지는 알 수 없어도 놀라운 발견임에는 틀림없다. 그리고 이러한 도구의 진면목을 제대로 알아내는데 2000년씩이나 걸렸다는 것은 또 다른 놀라운 일이 아닐 수 없다.