

그리스 수학사 간추린 내용

고려대학교 이과대학 수학과

김영욱

2011. 03.

1 Anglin의 책에서

1.1 Civil Servant를 위한 수학

아리스토텔레스는 수학이 이집트의 사제들로부터 시작했다고 생각했다. 그 이유로는 ‘그곳에서는 사제 계급 사람들은 여가를 가질 수 있었기’ 때문이라고 생각했다 (*Metaphysics* 981b 23–24). 그러나 헤로도토스는 기하가 만들어진 것은 나일강이 매년 범람할 때마다 땅의 구획을 다시 재고 경계를 나눌 필요가 있어어라고 믿었다. 실제로 데모크리토스는 이집트 수학자들을 rope-stretcher라고 불렀다.

신기하게도 철학적인 관점에서 이집트 사람들은 수학이 신(Thoth)의 영역에서부터 나온 것이라고 생각했다. 이런 것을 Platonism이라고 부른다. 이의 반대로 인간의 동물적 본성에서 시작했다는 관점을 Aristotelianism이라고 한다.

이 절의 마지막에는 ‘피라미드의 크기를 재서 보니 이집트 사람들이 π 의 값으로 3.14를 알았다’고 하는 생각이 사실이 아니라는 근거를, 이보다 1000년 후의 Rhind Papyrus의 π 값이 3.16이라는 사실에서 대고 있다.

1.2 수메르, 바빌로니아

수메르와 바빌로니아의 수학은 그 동네(현 이라크)에서 발견된 점토판의 내용에서 알 수 있다. 가장 발전했던 것은 B.C. 575년 경인 Nebuchadnezzar(성경에서 느부갓네살이라고 부르는)의 통치 시대였다. 그러나 그 대부분의 수학은 B.C. 2000년 경에 이미 만들어진 것이다.

바빌로니아 사람들은 60진법을 썼으며 이것은 그리스 시대에 Nicaea의 Hipparchus에 의해서 그리스 천문학에 도입되어 현재 1시간에 60분이라는 분법으로 계승되었다.

그 사람들은 pythagorean triples에 대해 알았다. 그리고 제곱근의 근사값을 구하는데 지금 뉴턴의 반복근 사법에 해당하는 계산을 할 줄 알았다.

1.3 연역법의 시작

고대의 그리스는 현재의 그리스 지역은 물론 터키의 서쪽 해변가인 Ionia에서 남부 이태리까지에 걸쳐 있었다. B.C. 600년 경 사람인 Miletus¹의 Thales는 이집트에 가서 기하를 배웠다. 탈레스는 몇 가지 고전기하학의 정리를 만들었다고 알려져 있다. 그러나 이 정리들은 그 이전의 이집트와 메소포타미아 사람들이 알고 있던 내용이다. 이것을 탈레스의 이름을 붙이는 이유는 트가 이 정리들을 처음 증명했기 때문이다. 이것이 그리스

¹현재 터키의 남서부 해안 지역

천의 수학과 그리 수학의 본질적인 차이이다. 그리스 사람들은 수학적 결과들 사이의 논리적 관계를 세웠으며 몇 개의 전제조건(공리)로부터 정리들을 이끌어(연역해) 내었다.

또 탈레스는 다음과 같은 철학적 주장들을 했다: **1.** 이 세상에는 하나 이상의 존재가 있다; **2.** 이 세상의 존재는 단 한 종류(물, water)이다; **3.** 물리적 세상은 연결되지 않은 조각(quark 등)으로 이해하면 안되고 연결된 물질(즉, 공간)로 이해하여야 한다. 현대 물리학의 내용과 비록 틀리더라도 이러한 내용이 중요한 이유는 이러한 문제를 처음 제기한 것이 탈레스라는 점이다.

1.4 Pythagoras 학파

Pythagoras는 현재 터키 지방의 해안의 섬인 Samos에서 태어났다. Iamblichus 등의 기록에 의하면 피타고라스는 Babylonia 사람들 밑에서 공부했다. 점토판에서 알 수 있듯이, 바빌로니아 사람들은 피타고라스 삼각형, 즉 피타고라스 수 $(2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$ ²로 잘못 되어 있음. 수정할 것. 에 대하여 잘 알고 있었으며, 따라서 피타고라스는 이것을 그들에게 배웠을 것이다. 따라서 그는 이 정리를 발견한 것은 아니며 그 증명을 처음 한 정도인지 모른다. 피타고라스가 피타고라스 정리의 증명을 처음 했는지도 알 수 없다. 또 피타고라스는 조로아스터교인 즉 'Magi' 밑에서 공부했으며, 인도에서 공부했을 가능성도 있다.

B.C. 525년 경에 피타고라스는 이태리 남부의 Croton으로 옮겨서 거기서 학파를 만들었고 이중 한명인 Theano와 결혼했다.

피타고라스는 '모든 것은 수이다'라고 주장했다. 이 말의 뜻은 모든 현상은 자연수(whole numbers)와 그의 비(ratio)로 설명할 수 있다는 뜻이다. 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 유리수가 아니라는 사실을 그의 추종자들이 발견했지만, 피타고라스 자신은 이 사실을 알지 못했다. 그는 10이라는 수에 특별한 의미를 두었다. 그는 이를 신성한 수(divine number)라고 했다.

피타고라스 학파는 그들의 연구 결과를 모두 피타고라스의 이름을 붙였다. 그러나 이 가운데 진짜로 피타고라스가 했다고 밝혀진 것은 하나도 없다. 중요한 결과들에는 다음과 같은 것이 있다: **1.** 피타고라스 정리의 증명; **2.** 산술평균, 기하평균, 조화평균의 성질들; **3.** 완전수와 amicable pair; **4.** 정다면체; **5.** $\sqrt{2}$ 가 유리수가 아니라는 사실; **6.** 도형수(삼각수, 사각수 등등).

1.5 피타고라스 학파의 수론

피타고라스 학파는 완전수에 관심이 많았고, 유클리드의 원론에서 이와 관련된 사실을 볼 수 있다. 아마도 Archtas(428-347 B.C.)라는 피타고라스 학파의 일원이 증명하였다고 생각되는 사실은 원론 Book IX에 나오는 정리인 $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ 꼴의 수가 완전수라는 증명이다. 이 증명은 가우스가 정수의 인수분해의 유일성(unique factorization)을 제대로 증명할 때까지는 완전한 증명이 아니었다. (원론에 있는 이런 꼴의 자연수에 대한 인수분해의 유일성의 증명은 완벽하지 못하다.)

이 이론은 메르센(Mersenne)의 소수, Lucas의 이론, Euler가 증명한 모든 짝수인 안전수는 이런 꼴이라는 사실의 증명 등과 연관되어 있다.

1.6 피타고라스 학파의 기하

그들은 정다면체(regular polyhedra) 즉 Platonic polyhedra에 대해 관심이 많았다. 정다면체는 5개가 있다: 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정20면체, 정12면체. 피타고라스는 이 중 앞의 4개는 알고 있었지만 정12

²앞의 버전에서 $(4uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$

면체를 발견한 사람은 Hippasus(470 B.C.)이다. 정다면체가 5개 뿐이라는 것은 유클리드의 원론에 증명되어 있다.

원론의 마지막 책에서 이 5개의 정다면체의 이론을 전개한다. 그리스인들은 삼각법도 미적분도 사용하지 않고 이 5개의 정다면체의 기본적 성질을 모두 증명하였다. 예를 들면 원론에는 이 정다각형의 한 변의 길이와 이 다각형에 외접하는 구면의 반지름의 비를 모두 계산하였다.

1.7 피타고라스 학파와 무리수

고대 그리스 사람들은 통약(通約, commensurable)이라는 개념을 만들어 썼다. 이것은 두 양(예를 들면 두 선분의 길이)이 동시에 어떤 작은 양의 자연수배가 된다는 개념이다. 이것은 이 두 양의 비가 자연수의 비로 나타내어 진다는 뜻이고, 하나가 다른 것의 유리수배가 된다는 말이다.

피타고라스 학파는 정사각형의 대각선의 길이가 한 변과 통약이 아님을 알아내었다. 이의 증명은 아리스토텔레스의 Prior Analytics 41a23-30에 있다. 처음에 이 학파의 사람들은 이 사실을 비밀로 하였다. Hippasus(470 B.C.)가 이 사실을 발설하여서 수장되어 죽었다는 이야기가 있다.

1.8 무한의 발견

세상에는 단 하나의 존재밖에 없다는 것을 주장하는 사람을 monist라고 한다. 이태리 지방의 Parmenides는 monist였고 그의 제자에 제논(Zeno, 450 B.C.)이 있다. monist는 세상에는 움직임이 없다고 한다. 움직이는 것이 있으면 그것의 출발점과 도착점이 있어 두 가지 이상의 것이 있게 되기 때문이다. 움직임은 환상(illusion)이라고 주장했다. 제논은 움직임이 없다는 그의 스승의 관점을 지지하는 4가지의 논증을 했다. 이 중 첫 번째 것은 움직임에 대해 두 번째 역설과 유사한 논리로 전개했다. 두 번째 것은 아킬레스와 거북이의 역설이다. 세 번째 것은 유명한 제논의 화살의 역설이다. 네 번째 논증은 속력의 최대값이 존재한다고 가정하는 주장이다. 이 모든 논증은 다음과 같은 형식을 지닌다.

무한이 없다고 하고, 다른 것과 비교하면 (예를 들면 공간이 연속적이라던가) 모순이 되어 운동이 존재할 수 없다.

이를 뒤집어 대우를 생각하던가 하면

움직임을 가정하고 다른 것과 비교하면 무한이 존재함을 받아들여야 한다.

한편 그리스 북동부의 Abdera 지방의 데모크리투스는 결정론자였다. 그는 ‘무한한 옛날부터 (무한한 미래까지) 모든 것은 이미 결정되어 있다’고 했다.

1.9 플라톤 이전의 아테네 수학

B.C. 479년에 페르시아를 몰아내고 나서 아테네는 그리스 문명의 중심지가 된다. 이것은 아테네가 B.C. 404년의 펠로폰네소스 전쟁에서 스파르타에게 패전하고 나서도 계속되었다.

아테네는 여자, 노예, 외국인에게는 인권이 별로 없었지만 반면에 예술과 과학을 하는 사람들에게는 좋은 환경을 제공하였다. Aeschylus, Sophocles, Euripides 같은 극작가가 배출되고, Socrates, Plato, Aristotle과 같은 위대한 철학가가 나왔다. 수학에서는 Hippias, Antiphon, Hippocrates, Theaetetus, Eudoxus, Menaechmus 등이 배출되었다.

B.C. 332년에 이집트에 Alexandria가 건설되면서 라이발 시대를 맞이했지만 A.D. 529년에 유스티아누스 대제(Justinian)가 플라톤이 세운 Academy를 폐쇄할 때까지 그 명성을 유지하였다.³

이 시기 수학자들의 업적에는 여러 가지가 있다. 또 B.C. 430년의 장티푸스 역병이 돌 때 Delos 신전에서 신탁으로 받았다는 유명한 문제인 ‘입방배적문제(立方倍積問題)’가 있다. 그리스인들은 이 문제의 근사해를 구하는 법은 잘 알고 있었다. 그러나 이 문제는 정확한(exact) 해를 작도(구성, construct)하는 방법을 묻는 문제이다.

소크라테스는 수학자는 아니지만 그의 argument에서 논리적 방법을 많이 썼다. 일화로 플라톤의 Meno에 남아있는 이야기가 있다. 이 이야기는 uneducated 노예 소년에게 직관적인 사각형 넓이 문제를 물어보고 그의 틀린 답을 들은 후, 논리적인 질문을 통해서 소년이 잘못되었음을 자각하도록 야도하고 계속해서 소년이 이해하는데까지 이르도록 만드는 것을 보여준 이야기이다. 이러한 방법을 문답법 또는 산파술(method of elenchus)이라고 한다.

1.10 플라톤 이후

플라톤은 그의 스승인 소크라테스의 처형 이후에 북아프리카를 여행하며 현재의 리비아인 Cyrene의 수학자 Theodorus와 같이 공부하였다. 또 나이 40이 되어서는 이탈리아를 방문하여 피타고라스 학파의 Archytas와 같이 지냈다. B.C. 380년 경에 Academy를 세웠고 그 문 앞에는 ‘기하학을 모르는 자는 들어오지 말 것’이라고 써 놓았다. 그의 저서의 여러 군데에 수학을 사용한 argument가 있다.

아리스토텔레스는 플라톤의 제자며 논리학을 연구하였다. Prior Analytics에서 syllogism(삼단논법)에 대하여 논하였다. 여기서 그는 명제를 네 가지 형태로 나누고 이 가운데 세 개의 인과관계가 항상 참이거나 아닌 경우에 대하여 논하였다. Posterior Analytics에서는 지금의 연역법에 대한 이론을 구성하였다. 이것은 유클리드에 의하여 받아들여져서 현재 수학으로 이어진다. 이 방법은 공리라는 명제들로부터 시작하여 정리라는 명제들을 증명한다. 증명의 각 단계는 공리나 또는 이미 증명된 정리나 논리법칙으로부터 정당화되어야 한다.

아리스토텔레스는 De Interpretatione에서 형식논리를 개척했다.

1.11 Eudoxus

플라톤의 제자 중의 하나인 Theaetetus는 제곱수가 아닌 자연수의 제곱근은 무리수임을 증명하였다. 그의 연구 결과들은 유클리드 원론의 Book X, XIII를 이룬다.

Eudoxus는 원론의 Book V, XII의 내용을 만들었다. 그는 플라톤의 학원에 공부하러 다녔고 또 플라톤과 논쟁을 하였다. Eudoxus는 원의 넓이가 그의 지름의 제곱에 비례한다는 것을 증명하였다.

Menaechmus는 플라톤과 Eudoxus의 제자이다. 그가 알렉산더 대왕에게 다음과 같은 말을 했다.

O King, through the country there are private roads and royal roads, but in geometry there is only one road for all.

Menaechmus는 2차곡선을 발견했다. 그는 2차곡선의 성질을 연구하고 이를 사용해서 입방배적하는 방법을 발견했다. 그는 아마도 다음과 같은 방법을 사용했을 것으로 생각된다: 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 과 $x = y^2$ 의 교점의 y 좌표는 $\sqrt[3]{2}$ 이다. 플라톤은 그가 자와 컴퍼스만 사용하지 않은 것에 불만이었지만 그것이 불가능하다는 것을 당시에는 몰랐다.

³이것은 플라톤의 Academy가 기독교의 교리를 받아들이지 않았기 때문이다.

2 유클리드의 원론

2.1 원론의 배경

원전	원론의 Book number
피타고라스 학파	I, II, VI, VII, VIII, IX, XI
Hippocrates	III, IV
Eudoxus	V, XII
Theaetetus	X, XIII

유클리드의 업적은 단지 이 원론을 논리적으로 정리 정돈하는 것이었다. 원론은 결국 소수의 정의와 가정으로부터 모든 것을 조심스럽게 이끌어내는 공리적인 구조이다. 이 구조는 다음과 같은 것들의 모델이 되었다: 아퀴나스의 *Summa Contra Gentiles*, 뉴턴의 *Principia*, 스피노자의 *Ethics*.

당시에 수나 대수의 기초나 집합 등의 개념이 없는 상황에서 유클리드가 택한 것은 점과 선을 기본으로 하여 출발하여, 썸의 법칙을 기하를 써서 나타내었다. 즉 유클리드의 수는 선분이었다.

2.2 이후의 그리스 수학

이후의 발전에는 다음과 같은 사람들이 있다: Aristarchus(310–250 B.C.), Archimedes(287–212 B.C.), Apollonius(260–190 B.C.), Eratosthenes(275–195 B.C.). 이 시기의 수학은 원과 2차곡선의 이론이다.

이후에 Hipparchus(180–125 B.C.), Menelaus(100 A.D.), Nicomachus(100 A.D. 경), Diophantus(250 A.D. 경), Pappus(320 A.C. 경), Hypatia (-415 A.D.) 등의 수학자가 있었다. 이 시기의 말기에 들어서면서 그리스 수학은 단순한 주석 달기 수준에 머무르게 되고 A.D. 529년에 유스티아누스 대제가 플라톤이 세운 학원을 폐쇄하면서 학자들은 페르시아로 망명했다. A.D. 641년에 알렉산드리아가 페르시아에 패하면서 알렉산드리아의 도서관이 불타고 고대 그리스의 수학은 종말을 고했다.

당시의 그리스 학자들은 신흥종교인 기독교를 받아들이지 않았고 로마제국에서 예로부터의 학문과 새로운 종교 사이에 분열이 생김으로 인하여 로마제국은 약화되었고 서구 문명은 오랜 동안 암흑기로 들어가게 된다. 이것을 다시 밝히게 되는 것은 토마스 아퀴나스(1225–1275)가 성경과 함께 유클리드 원론의 영향을 동등하게 받아서 만든 발전된 철학이 나오면서부터이다.

3 간추린 역사적 관점: 탈레스에서 유클리드까지—Eves에서

그리스 수학에서 첫 3세기 동안에 탈레스가 증명의 방법을 도입(B.C. 600년경) 한데서부터 유클리드가 원론을 완성한데(B.C. 300년경)까지의 발전은 눈부신 것이다. 보통 이오니아의 탈레스가 밀레투스에 학교를 세운 것과 피타고라스가 Crotona에 학교를 세운 것을 이야기하지만 당시 그리스 지역 전역에 걸쳐서 많은 수학의 중심지(center)들이 만들어지고 융성했다.

도리아 부족이 B.C. 1200년 경에 척박한 땅을 떠나 남하하면서 그리스 반도로 들어왔다.⁴ 그들 중에 중심 부족인 Spartan이 스파르타를 세웠다. 이전부터 이 지방에 살던 사람들은 쫓겨나서 흩어졌다. 그들은 소아시아, 에게해의 이오니아 섬들로 흩어져서 무역을 위한 그리스들의 집단 거주지(Greek trading colonies)를 세웠다. 탈레스의 이오니아 학교가 세워진 것이 이 집단거주지에서 시작되었고, 이로부터 그리스 철학과 논증기하가 꽃을 피웠다.

⁴아마도 빙하기나 소빙하기와 연관이 있을 듯? 확인 필요.

같은 시기에 페르시아는 강력한 군사력의 제국이 되었고, 노예제도에 의존한 국가는 외부로 팽창하면서 그리스와 충돌하게 된다. B.C. 546년에 이오니아의 도시들과 소아시아의 그리스인 거주지들을 복속시켰다. 그 결과 피타고라스나 Xenophanes 등의 (철) 학자들은 고향을 떠나서 당시 성했던 남부 이테리의 그리스인 거주지로 옮겨갔다. 이것이 피타고라스가 세운 Crotona의 학교와 Xenophanes와 Zeno, Parmenides 등이 세운 Elea의 학교 들이다. 이 학교는 철학과 수학 학교이다.

B.C. 499년에 아테네가 뒤에서 지원하여 이 이오니아 지방의 그리스인들이 페르시아에 반란을 도모했으나 불발로 끝났다. 그러나 이 사태로 페르시아의 왕 다리우스가 그리스를 징벌하려고 B.C. 492년에 침공하나 악천후로 실패하고, 그로부터 2년 후에 다시 쳐들어오나 Marathon에서 아테네에게 참패한다. 이때부터 아테네가 그리스의 중심지로 부상한다.

B.C. 480년에 다리우스의 아들 Xerxes가 다시 침공하여 스파르타가 이끈 육군은 Thermoplae에서 참패를 하지만 아테네가 이끈 Salamis 해전에서 승리하여 페르시아를 물리치고 다음해 Plataea 전쟁에서 승리하여 페르시아 군을 몰아낸다. 이로 얻은 아테네의 융성과 50년 동안의 평화 동안에 그리스의 학문은 눈부시게 발전하였다. Pericles와 Socrates 등의 도시는 민주주의와 지적인 발전의 중심이 되었으며⁵, Anaxagoras, Zeno, Hippocrates와 같은 많은 수학자들이 그리스 전역에서 아테네로 모여들었다.

B.C. 431년에 아테네와 스파르타 사이에 펠로폰네소스 전쟁이 발발하여 평화가 깨지고, 역병이 돌아 아테네 인구의 1/4이 사망하는 일을 겪은 후에 B.C. 404년 아테네는 패전했고, 스파르타가 권력을 잡았으나 이도 B.C. 371년에 다른 도시국가에게 내주고 만다. 이 동안은 학문의 발전은 없었고, 전쟁이 끝난 후에 남이탈리의 피타고라스 학파가 다시 돌아와 Tarentum에 학교를 열고 재능있고 승양받았던 Archytas가 이를 이끌었다.

펠로폰네소스 전쟁이 끝나고 아테네는 정치에서는 멀어졌지만 학문적으로는 계속 주도권을 쥐고 있었다. 역병의 시기에 Plato가 태어나서 소크라테스에게서 공부하였으며, 수학은 북아프리카의 도시인 Cyrene에 가서 Theodorus에게서 배웠다. 그는 Archytas와 절친한 친구였으며 B.C. 380년에 돌아와서 유명한 학원(Academy)을 열었다. Eudoxus는 Archytas와 Plato 모두에게 배웠으며 북 소아시아의 Cyzicus에 학교를 세웠다. Menaechmus는 Eudoxus의 학생으로 Plato를 도우면서 2차곡선의 개념을 처음 만들었다. 당시에는 Theodorus의 재능있는 학생으로 Theaetetus가 나왔으며 모두 유클리드의 원론에 수록된 내용에 일조하였다.

3.1 그리스 수학의 갈래

그리스 수학은 다음 3가지로 발전하였다. 우선 유클리드의 원론에 집약된 기하학이 있으며 후에 계속하여 발전했다. 두번째는 무한소와 무한 및 극한의 개념에 대한 것으로 Zeno의 역설이나 Antiphon과 Eudoxus에 의해 사용된 method of exhaustion 등과 Democritus에게서 나온 atomistic theory 등이다. 세번째는 유명한 작도불가능 문제를 풀기 위해서 개발된 고급기하학이다. 유클리드의 기초적인 기하학이 직선과 원을 중심으로 한 것인데 반하여 고급 기하학은 직선과 원 외의 곡선과 평면이나 구면이 아닌 곡면에 대한 이론이다.

그리스 수학이 발전한 이유로 이 작도불가능 문제 세 개가 지대한 역할을 했다는 평가가 있다. 많은 문제를 해결할 수 있는 직선과 원을 사용한 작도법이 적용되지 않는 문제를 가지고 있었으므로 이를 해결하기 위한 시도를 통해 많은 새로운 이론들이 만들어졌다고 본다. 이 문제는 실제로는 2000년이 지나서야 불가능하다고 판결날만큼 어려운 문제였다.

⁵meaning a lot of discussions

3.2 그리스의 수학

그리스의 수학은 수의 이론을 다루는 수론(Arithmetics)과 실질적인 계산법을 다루는 Logistics로 나뉜다. 그리고 그리스인이 다룬 것은 수와 선분이었다. 이것은 겉보기에는 대수와 기하로 나뉘는 것이지만 그 내용상 보면 실제로 자연수(정수)와 실수를 다루는 것에 해당한다.

Greece	현대
수	자연수
선분	실수

3.3 그리스 수학의 약점

그리스에서 수를 사용할 때는 처음에는 로마와 바빌로니아에서 이어받은 이론을 공부했고 그쪽의 방법을 사용했으리라고 보이나 그리스 문자를 숫자로 활용하는 방법이 개발되었다. 그리스 알파벳으로 1, ..., 9, 10, ..., 90, 100, ..., 900을 각각 나타냈다. 모자라는 글자는 다른 문자에서 차용했다. 이 방법은 매우 오래 동안 사용되어 A.D. 15세기까지 계속되었다. 이 방법은 decimal nonposition system, 즉 10진법이고 자리를 매기지 않는 방식이다. 따라서 $\iota\delta = \delta\iota = 14$ 이다. 이 방법은 너무 원시적이어서 자리매김을 사용하는 방법에 뒤처지며 이를 사용한 그리스 수학이 어느 수준 이상의 발전에 한계를 갖는 원인이 되었다고 생각된다.

참고 문헌

- [1] Anglin, W. S., Mathematics: A Concise History and Philosophy, UTM series, Springer, 1994.
- [2] Nicolaos K. Artemiadis, History of Mathematics, From a Mathematician's Vantage Point, AMS, 2004.
- [3] Eves, H., An Introduction to the History of Mathematics, 4th ed., Thompson Learning, 1976.