“김영욱의 현대수학입문 강의록” 리뷰

이경일

2010년 9월

1 들어가며

우선 이런 리뷰를 쓸 수 있게 정말 재미있는 글을 써주신 김영욱 교수님(편이상 이하 저자라 부름)께 감사의 말씀 드리고 싶다. 저자의 ‘정보와 구조’라는 글에서 보면 자신이 느끼는 건 전달될리 만무하다고 한다. 자연과학에서 현상을 관찰하고 느낄 때, 모두에게 동일한 정보로 받아드리지 못할 것이라는 것이 상식이라면 쉽게 이해가 가는 부분이다. 저자는 내용(information content)[1]이라는 개념을 가지고, 이런 느끼는 것 (또는 현상을 감지하는 것)과는 다는 무엇으로 이원(二元)하고 있다. 플라톤의 이원론과 별반 다름이 없지만, 이것이 수학을 바라보는 보편적인(?) 생각이다.

한편 이런 생각과는 다르게 1930년대를 기점으로 수리논리학 및 수학기초론을 통해 계산가능성 이론(Computability Theory 혹은 Recursion Theory)을 발전시킴으로써, 수학과 현상과학(더 나아가 인문과학까지도?)과의 구체적인 관계를 설명해, 이런 이원을 해결할 철학적인 기대를 하는 것도 사실이다. 왜냐하면 계산가능성 이론에서는 수학적 구조(structure)를 정보내용(information content)로 부르는데, 이건 계산하는 것이 느끼는 것 모두를 시뮬레이션 하고 있다고 한다면 플라토닉 이원을 아주 구체적으로 화해시킬 수 있기 때문이다.

난 수학을 하고 있기 때문에 플라토닉 이원을 통한 이야기가 하나도 거북스럽지 않다. 수학을 본격적으로 하지않아도 수학을 생각할 땐 플라토닉 이원은 매우 편리한 상상이다. 저자가 강의록을 쓸 때, 앞 단락에서의 수리논리학에서 일어나고 있는 철학적 이슈를 의식하면서 썼다고는 생각하지 않지만, 비슷한 의미의 화해를 쉽게 예를 들어가며 이야기하고 있는 것 같아 흥미롭다.

난 학부 학생시절 저자의 강의을 들은 적이 있다. 그 당시 저자의 강의에는 어떤 느낌이 소통하는 감동이 있었다. 독자들도 비록 강의록을 통해서지만 이런 감동을 느껴봤으면 하는 바람이다. 강의록 자체가 리뷰가 필요없을 정도로 너무도 이해하기 쉽게 쓴 글이므로, 몇 가지 제안과 아쉬운 점 한가지를 지적하는 것으로 리뷰를 대신한다.

---

[1] 계산가능성 이론에서 부르는 information content와는 다른 개념이다. ([1] 참조)

2 극한의 정의

어떤 실수열의 극한을 정의한다는 것은 실수를 정의한다는 것과 다름이 없다. 따라서 이왕이면 저자는 실수를 유리수열로 정의하는 식으로 설명했으면 어땠나 싶다. 예를 들어 실제로 특정 이차산수의 써브이론(subsystems of second order arithmetic)에서 유리수열의 극한으로 실수를 정의한다. ([3] 참조) 따라서 여기서 실수를 정의할 때 실수열을 이용할 필요가 없어진다. 또한 실수열이든 유리수열이든, 그 수열이 극한을 가진다는 표현을 할때 꼭 ϵ이 실수일 필요도 없어진다. (이렇게 정의된 구체적인 실수(극한)라는 것이 이차산수 언어(language of second order arithmetic)로 정의되어도, 그 실수는 이차산수 언어 밖의 것이 되지만.) 중요한 건 기계적인 절차를 통해 '무한히 많은(infinitely many)', '많이 봤자 유한개만 빼고(almost every)'라는 개념 이해를 제공할 수 있다는 거다. ([4] 참조) 더 나아가 이런 표현들의 복잡성까지도 덤으로 알 수 있다. 이런식의 기계적인(mechanical) 이해는 저자의 글 '정보와 구조'에서 밝힌 수학하면서 달성해야하는 목표, 즉 소통하는 것과 연구하는 일이 따로 놀지 않을 수 있는 데에 도움이 되지 않을까 한다. 참고로 예를 들어 계산가능한 실수는 다음과 같이 정의 된다.

정의 2.1. We say the real number r is ***computable*** if $(\forall\epsilon(s_1))(\exists s_1)(\forall n \geq s_1)[|a_n - r| < \epsilon(s_1)]$ where ϵ is (uniformly) computable in s_1 [2] and the rational sequence a_n is computable [3] . Equivalently, if a_n *binary converges* to r, namely, $(\forall s_2)(\exists s_1 > s_2)(\forall n \geq s_1)[|a_n - r| < 2^{-s_2}]$.

3 일차논리

보통 학부때 해석학이나 위상수학을 접하기 전에, 기본적인 집합론과 더불어 기초적인 수리논리를 소개한다. 저자의 경우뿐 아니라 대부분의 강의에서 일차논리(first order logic 또는 predicate logic)부분은 아주 간단히 넘어가고, 명제논리(propositional logic)을 소개하는데 대부분을 할당한다. 보통 수학을 위한 논리로 최소한 일차논리(first order logic 또는 predicate logic)가 있어야 실질적인 수학을 연구할 수 있고, 이차논리(second order logic)이면 이런 실질적인 수학이 어떤 모습인가 바라볼 수 있다는 점을 고려하면, 최소한 일차논리까지는 좀 자세히 소개했으면 어땠나 싶다. 보통 학생들이 어려워하는 부분도 일차논리 부분이 아닌가 생각하면 말이다.

[2]We say the real number r is Σ^0_2 if $(\forall\epsilon(s_1))(\exists s_1)(\forall n \geq s_1)[|a_n - r| < \epsilon(s_1)]$ and ϵ is (uniformly) computable in s_1. Notice that this does not require that a_n be a *computable presentation* and note that r is, in fact, Δ^0_2 since $(\forall\epsilon(s_1))(\forall s_1)(\exists n \geq s_1)[|a_n - r| < \epsilon(s_1)]$.

[3]We say the rational sequence a_n is a ***computable presentation*** of r if $(\forall\epsilon)(\exists s_1)(\forall n \geq s_1)[|a_n - r| < \epsilon]$ with $\epsilon \in \mathbb{Q}$ — i.e., $\lim_n a_n = r$ — and a_n is computable. Notice that this does not require a computable ϵ in s_1.

4 일상언어와 논리

저자는 수학언어[4] 범위 밖에서 일차논리 연역 규칙을 적용하지 말았어야 했다. 일상언어 (everyday language) 의 문장을 일차논리 언어를 사용해 잘정의된 논리식 (well-formed formula 또는 간단히 wff) 으로 번역 (translation) 할 순 있어도[5], 일차논리를 이용한 추론까지는 하지 말았어야 했다. 저자의 예 중에 "비가오면 우산을 쓴다." 라는 문장이 있다. 예를 들면 이 문장을 일차논리식 $(\forall x)[R(x) \to U(x)]$ 으로 번역할 순 있다. (여기서 $R(x)$ 는 'x가 비가오는 걸 감지하다.'를 의미하고 $U(x)$ 는 'x가 우산을 쓰다.'를 의미한다.) 하지만 일차논리로 추론하면 이상해지는데도 불구하고 추론을 했다. 예를 들어 "우산을 안쓰면 비가 안온다."라는 문장의 의미가 정확히 "비가오면 우산을 쓴다."라는 문장의 의미와 같은가 하면, 일상언어 생활에서는 아닌 것 같다. 다음 인용 글에서 보면, 저자가 우산을 쓰면 비가 와야한다는 믿음 때문인진 몰라도, 의도적으로 애매한 표현을 고른 것 같긴 하다. (내가 판단하기엔 "항상" 이라는 단어가 뭔가 필연성을 부여하는 듯 보인다.)

> 이제 (2) 가 항상 성립하는 말이라고 하자. 즉 A가 우산을 쓰지 않고 있을 때 날씨를 보면 항상 비가 안 오고 있더라는 사실을 안다면, 비가 오고 있을 때는 안 봐도 A가 우산을 쓰고 있을 것이라 는 생각이 든다. 즉 (2) 가 성립하면 (1) 이 성립한다. ⟨정보와 구조, 김영욱⟩

애매하지 않은 (?) "A라는 사람이 우산을 쓰지 않는다면 비가 오지 않는다."라는 문장을 생각하자. 꼭 비가 오고 있을 때는 안 봐도 A가 우산을 쓰고 있을 것이라는 생각이 드는 건 아니지 않는가? 애매하지 않은 위 문장만으로는 가끔 우산을 쓸 때도 비가 오지 않는 상황을 생각할 수 있다.

이런 일상언어를 가지고도 잘 성명해주는 논리를 찾는 노력은 여러 현대논리 (?) (non-classical logic) 라는 카테고리 안에서 철학논리 (philosophical logic) 가 담당하고 있다. 예를 들면 양상논리 (modal logic), 직관논리 (intuitionist logic) 등등이 있다. ([2] 참조) 인용문으로 다시 돌아가서, "항상" 이라는 단어가 뭔가 필연성을 나타내는 것이라면, 이는 양상논리에서 다뤄져야 한다.

5 마무리하며

몇 가지 제안과 더불어 한가지 아쉬운 점만 빼면, 어렵게 얻어야 할 것 같은 것도 쉽게 얻을 수 있도록 도와주는 멋진 강의록이라 생각한다.

[4] 예를 들면 피아노 산수언어 (language of Peano Arithmetic)

[5] 물론 일상언어의 애매함 (ambiguity) 때문에 몇가지 다른 번역이 나올 수 있다.

참고 문헌

[1] S. B. Cooper. *Computability Theory.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 2004.

[2] G. Priest. *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge University Press, Cambridge, Madrid, Melbourne, New York, 2001.

[3] S. G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic.* Spriger-Verlag, Berlin, Heidelberg, London, New York, Paris, Tokyo, 1999.

[4] R. I. Soare. *Recursively Enumerable Sets and Degrees.* Spriger-Verlag, Berlin, Heidelberg, London, New York, Paris, Tokyo, 1987.