Change of Basis Formula — 김영욱(고려대학교)

여기서 공부하는 것은 basis가 달라질 때 행렬의 곱셈은 어떻게 변하는가를 알아보는 것입니다. 이것은 뒤에서 공부할 정리 8.5.2의 특수한 경우입니다. 나중에 공부해도 되겠으나 347쪽에 나오는 Diagonalization problem이 왜 중요한 문제인가를 이해하기 위하여 미리 알아 두려고 하는 것입니다.

문제는 $\mathbb{R}^n$의 벡터에 행렬 A를 곱할 때, 그 결과를 standard basis가 아닌 다른 basis에 대한 좌표의 입장에서 볼 때는 어떤 행렬을 곱하는 것이라고 보이는가 하는 문제입니다.

즉, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 이라고 하지요. 이 벡터에 행렬 A를 곱하면 $A\mathbf{x}$를 얻습니다. 이제, 다른 basis $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$을 생각합니다. 그러면

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{w}_1 + \cdots + y_n\mathbf{w}_n$$

이라고 쓸 수 있습니다.

$\mathbf{w}_1$, ..., $\mathbf{w}_n$을 column vector로 하는 행렬을

$$P = [\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_n]$$

라고 부르기로 하죠. $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]^T$라고 부르기로 합시다. 그러면 위의 식은

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}$$

라고 써도 됩니다. 이제 $A\mathbf{x}$를 $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$에 대한 일차결합으로 쓰면 어떻게 되나를 생각해봅니다. 즉,

$$P\mathbf{z} = A\mathbf{x}$$

인 $\mathbf{z}$를 찾고 싶은 겁니다. 이제

$$P\mathbf{z} = A\mathbf{x} = AP\mathbf{y}$$

를 풀어보면

$$\mathbf{z} = P^{-1}AP\mathbf{y}$$

를 얻게 됩니다. 즉, basis $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$에 대한 계수가 $\mathbf{y}$인 벡터 $\mathbf{x}$에 A를 곱하여 얻은 벡터를 다시 $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$의 일차결합으로 나타낼 때의 계수 $\mathbf{z}$는 $P^{-1}AP\mathbf{y}$ 가 된다는 말입니다.

다시 말하면 A를 곱하는 것은 basis $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$에 대한 계수벡터의 입장에서 보면 $P^{-1}AP$를 곱하는 것과 같다는 뜻이지요.

그래서 주어진 행렬 A에 대하여 행렬의 변형 $P^{-1}AP$는 중요한 의미를 가집니다. 이렇게 변형된 행렬 $P^{-1}AP$는 원래의 A와 서로 similar하다고 합니다.(닮은꼴이라는 말이겠죠.)

(끝)