김영욱의 미분기하 시험문제 모음집

김영욱
고려대학교

1. 1998년 중간시험

♠ 다음 문제들을 읽고 그 내용이 옳으면 그 이유를 설명하고, 그 내용이 틀리면 반례를 들고 설명하시오.

(1) 접(Tangent)벡터를 함수에 방향미분으로 작용시킬 때, 함수에 대하여 *라이프니츠*법칙이 성립한다.
(2) 미분가능한 함수를 성분함수로 갖는 곡선은 smooth 한 모양을 갖는다.
(3) 1–형식(1–form) ϕ, ψ 에 대하여, $d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi + \phi \wedge d\psi$ 이다.
(4) 모든 벡터의 길이를 알면 내적을 알 수 있다.
(5) smooth regular curve 는 어느 방향에서 보아도 smooth 함수의 graph 가 된다.
(6) 유클리드 공간에서 곡률이 0 인 곡선은 직선 뿐이다.

♠ 다음 문제들을 푸시오.

(1) 모든 실수 값을 갖는 함수 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(\alpha(t))$ 와 $f(\beta(t))$ 가 $t = 0$ 에서 같은 미분 값을 가지기 위하여 곡선 $\alpha, \beta : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ 가 만족하여야 할 필요충분조건을 구하고 이를 보이시오.
(2) $\phi = dx + dy + dz, \psi = a\,dx + b\,dy + c\,dz, \eta = (b+c)dx + (c+a)dy + (a+b)dz$ 에 대하여 $\phi \wedge \psi \wedge \eta$를 계산하시오.
(3) 사상 $F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ 는 $\mathbb{R}^2 \setminus O$ 의 모든 점에서 각을 보존함을 보이시오.(즉, 한 점에서 두 벡터 사이의 각이 사상의 differential 에 의하여 보존됨을 보이시오.)
(4) 곡선 $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ 에 대하여 점 $(1, 1, 1)$ 에서 Frenet-Serret apparatus 를 구하시오.
(5) 원점을 지나는 곡선 $\alpha(t) = (t - \frac{2}{3}t^3, t^2, f(t))$ 가 z 축을 축방향으로 cylindrical helix 를 이룰 때, $f(t)$ 를 모두 구하시오.
(6) 3차원 공간에서 regular 곡선 α 위의 모든 점에서 그은 접선이 항상 정해진 점 p 를 지난다고 한다. 이 곡선은 직선임을 보이시오.

2. 1998년 기말시험

♠ 다음 문제들을 푸시오. (각 15 점)

(1) 3차원 공간에서 regular 곡선 α 위의 모든 점에서 그은 접선이 항상 정해진 점 $\mathbf{p}$ 를 지난다고 한다. 이 곡선은 직선임을 보이시오.

(2) W 가 일정한(상수) 길이 $\|W\|$ 를 갖는 smooth 한 벡터장이라고 하자. 임의의 벡터장 V 에 대하여 $\nabla_V W$ 는 모든 점에서 W 와 서로 수직임을 보이시오.

(3) $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x < 0\}$ 에서 frame field $E_1 = -\cos\theta\, U_1 - \sin\theta\, U_2$, $E_2 = -\sin\theta\, U_1 + \cos\theta\, U_2$ 에 대하여 attitude matrix 를 써서 connection form을 구하고, Cartan의 구조방정식을 확인하시오.

(4) 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 위에서 벡터 $(1, 0, 1)$ 만큼 평행이동(translation) 한 후에 평면 $x + y = 0$ 에 대하여 대칭이동하였다. 이 isometry 를 translation T 와 직교변환 C 를 써서 $T \circ C$ 꼴로 나타내시오.

(5) 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 위에서 향을 보존하는(orientation preserving) 직교변환을 회전(rotation)이라고 부른다. 이러한 직교변환 F 는 항상 어떤 방향을 보존함을 보이시오. 즉, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ 가 있어서 $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ 임을 보이시오.

(6) 유클리드 평면에서 정의된 이차식(이차형식) $f(x, y) = 2xy$ 에 대하여 이에 대응하는 대칭 쌍선형형식(symmetric bilinear form) $g((x, y); (u, v))$ 를 구하고 이차곡선 $f(x, y) = 1$ 의 주축(主軸)을 구하여 이들을 좌표축으로 한 좌표에 대한 이차형식으로 나타내시오.

(7) 사상 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 가 미분가능함의 정의를 쓰고 이의 미분이 어떠한 기하학적의미를 갖는지를 설명하시오.

(8) $\mathbb{R}^3$ 의 frame field E_1, E_2, E_3 에 대하여 connection form 을 정의하고, 이 형식들이 skew-symmetric 행렬을 이룸을 보이시오.

(9) 삼차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 위에서 Cartan 의 구조방정식을 쓰고 이를 증명하시오.

(10) 삼차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 isometry F 가 $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 를 만족하면, 이 F 는 직교변환임을 보이시오.

3. 2001년 중간시험 및 풀이

♣**문제 1**: 미분가능한 함수를 성분함수로 갖는 곡선은 smooth한 모양이다.

풀이: (False) 이 문제는 평면에서 (t^2, t^3)과 같은 곡선의 그래프를 생각해보면 된다.

♣**문제 2**: 내적이 주어진 벡터공간에서 모든 벡터의 길이를 알면 모든 벡터 사이의 내적을 구할 수 있다.

풀이: (True) 두 벡터 $\mathbf{v}.\mathbf{w}$의 내적을 구하려 할 때, 단지 두 벡터의 크기 $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{w}\|$를 아는 것으로는 충분하지 않지만 이에 $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$를 더 알면 코사인 제2 법칙과같이 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$의 내적을 구할 수 있다. 즉,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2)$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \frac{1}{4}(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2)$$

등을 이용하면 된다.

♣**문제 3**: 유클리드 공간에서 곡률이 0인 regular인 곡선은 직선뿐이다.

풀이: (True) 이 곡선 $\boldsymbol{\alpha}(s)$가 arclength를 매개변수로 갖는다고 하자. 그러면

$$\boldsymbol{\alpha}'' = \mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N} \equiv 0$$

이므로 이 식을 적분하면 $\boldsymbol{\alpha}(s) = s\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 이다. ($\mathbf{v}_i$는 상수벡터)

♣**문제 4**: smooth regular인 곡선은 어느 방향으로 정사영해도 smooth regular 인 평면곡선으로 보인다.

풀이:(False) 모든 smooth regular인 곡선은 $\mathbf{T}$ 방향으로 $\mathbf{T}$에 수직인 평면에 정사영하면 부분적으로 cusp(뾰족한 끝, 1번 문제의 점)과 같은 모양을 띈다. 예를 들어, 곡선

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (t^2, t^3, t)$$

를 xy–평면에 정사영하면 1번 문제의 예와 같은 곡선이 된다.

그러나, 답에서 잘 보이는 circular helix $(\cos t, \sin t, t)$를 xz 또는 yz–평면에 정사영하는 것은 뾰족한 끝을 만들지 않는다. 실제로, xz–평면에 정사영한 곡선은 $(\cos t, t)$가 되며 이 곡선은 코사인 함수의 그래프 모양을 하고 있고 smooth한 모양이다. 단 한 사람만이 이러한 helix를 비스듬히 $\mathbf{T}$ 방향에서 보아야 한다고 제대로 지적하였다.

♣**문제 5**: simple surface의 점 $\mathbf{x}(a,b)$에서의 접벡터는 2차원 공간을 이룬다.

풀이: (True) 교과서 84쪽, 명제 1.18을 볼 것.

♣**문제 6**: regular curve $\boldsymbol{\alpha}$와 공간안의 점 $\mathbf{x}_0$에 대하여 $\boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{x}_0$가 항상 $\mathbf{T}(t)$와 수직이라면 $\boldsymbol{\alpha}(t)$는 어떤 구면 위에 놓인다.

풀이: (True) 함수

$$f(t) = \langle \boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{x}_0 \rangle$$

을 t에 대하여 미분하여 $f'(t) \equiv 0$ 임을 보인다.(쉽다) 그리고 이로부터 얻는 방정식 $f(t) = r^2$(상수)이 구면의 방정식임을 확인하면 된다.

♣**문제 7**: 다음 곡선이 unit speed임을 확인하고 Frenet-Serret apparatus를 계산하여라.

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \cdots\cdots$$

풀이: 단순한 계산.

♣**문제 8**: regular curve $\boldsymbol{\beta}(t)$에 대하여 다음을 보여라.

$$\mathbf{B} = \dot{\boldsymbol{\beta}} \times \ddot{\boldsymbol{\beta}} / \|\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \ddot{\boldsymbol{\beta}}\|$$

풀이: $\dot{\boldsymbol{\beta}} = v\mathbf{T}$ 라고 쓰고($v > 0$), 계산하면

$$\ddot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{v}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}.$$

이것을 써서 계산하면

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \ddot{\boldsymbol{\beta}} = v^3\kappa\mathbf{B}$$

이다. 따라서 $\|\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \ddot{\boldsymbol{\beta}}\| = v^3\kappa$ 이다.

♣**문제 9**: $\kappa \neq 0$ 인 곡선 $\boldsymbol{\alpha}$가 평면곡선이 되기 위한 필요충분조건은 모든 접촉평면이 한 점 $\mathbf{x}_0$를 지나는 것임을 보여라.

풀이: $\boldsymbol{\alpha}(t)$에서의 접촉평면의 방정식은 $\langle \mathbf{p} - \boldsymbol{\alpha}(t), \mathbf{B} \rangle = 0$ 이다. 따라서 모든 t에 대하여

$$\langle \mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\alpha}(t), \mathbf{B} \rangle = 0 \tag{1}$$

이다. 양변을 미분하면,

$$-\langle \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\alpha}, -\tau\mathbf{N} \rangle = \tau\langle \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle = 0$$

이제 $\tau \not\equiv 0$ 이라고 하자. 그러면 어떤 구간에서

$$\langle \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \equiv 0 \tag{2}$$

이다. 이를 다시 미분하면

$$\langle \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}_0, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \rangle = -\kappa\langle \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}_0, \mathbf{T} \rangle \equiv 0.$$

$\kappa \neq 0$ 이므로,

$$\langle \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}_0, \mathbf{T} \rangle \equiv 0 \tag{3}$$

이다. 따라서 식 (**??**), (**??**), (**??**)에서 $\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{0}$ 이 되어 모순이다. 즉, $\tau \equiv 0$ 이다. 따라서 곡선 $\boldsymbol{\alpha}$는 평면곡선이다.

♣**문제 10**: 다음 곡면의 단위법벡터장을 구하여라.

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \cdots\cdots$$

풀이: 단순한 계산.

♣**문제 11**: 좌표변환에 대하여 벡터의 성분 사이의 관계를 유도하여라.

풀이: 교과서 97쪽 (3-9)를 볼 것.

♣**문제 12**: 회전면의 first fundamental form의 계수를 구하여라.

풀이: 단순한 계산.

4. 2001년 학기말 시험 및 풀이

♣**문제 1**: Stereographic projection을 식으로 나타내어라.

풀이: 간단한 계산에 의하여,

$$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad : \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

♣**문제 2**: $g = |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|^2$ 임을 보여라.

풀이: 교과서 95쪽.

♣**문제 3**: $\kappa_g \mathbf{S}$를 구하여라.

풀이: 교과서 104쪽.

♣**문제 4**: ${\Gamma_{ij}}^k$와 ${\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma$ 사이의 변환식을 구하여라.

풀이: 교과서 105쪽 관계식

$${\Gamma_{ij}}^k = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_l \rangle g^{lk}$$

를 써서 계산하면 된다. 결과는 108쪽 문제 4-11.

♣**문제 5**: 구면에서의 geodesic은 항상 대원임을 보여라.

풀이: 대원의 principal normal $\mathbf{N}$은 항상 $\mathbf{n}$임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 대원은 geodesic이다..

이제 구면 위의 한 점 P에서 단위접벡터 $\mathbf{v}$를 잡자. 점 P를 지나며 벡터 $\mathbf{v}$에 접하는 대원은 geodesic이며 그 속도벡터는 $\mathbf{v}$ 이다. geodesic 방정식의 해의 유일성으로부터 이 대원이 점 P를 지나며 그 점에서의 속도가 $\mathbf{v}$인 geodesic 이다.

♣**문제 6**: 구면 위에서 위도 45°인 소원(위선)을 따라 평행이동한 벡터는 한 바퀴 돌아 제자리에 오면 몇 도 회전하였는가?

풀이: 교과서 119쪽과 같이 방정식을 만들어 계산하면 $\sqrt{2}\pi$ 만큼 회전한다.

♣**문제 7**: 단위구면에서 법벡터장은 외향법벡터로 잡을 때, 이 곡면의 Weingarten map $\mathbf{L}$은 항등사상임을 보여라.

풀이: 단위 구면의 각 점에서는 $\mathbf{n} = \mathbf{x}$ 이다. 따라서

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i\mathbf{n} = \mathbf{n}_i = \mathbf{x}_i$$

이다. 즉 $\mathbf{L}$은 바탕벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$에 대하여 항등사상이 되며, 따라서 $\mathbf{L}$은 항등사상이다.

♣**문제 8**: 회전면의 제2기본형식의 계수 L_{11}을 구하여라.

풀이: $\dot{r}^2 + \dot{z}^2 = 1$ 임을 쓰면, 단순한 계산에 의하여.

$$L_{11} = \dot{r}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{r}.$$

♣**문제 9**: 곡면의 Codazzi-Mainardi의 방정식을 쓰고 이를 유도하여라.

풀이: 교과서 142쪽.

♣**문제 10**: 좌표곡선(u^i–curve)이 곡률선이될 필요충분조건은 $g_{12} \equiv L_{12} \equiv 0$ 임을 보여라.

풀이: 좌표곡선이 곡률선이면 $\mathbf{x}_i$가 $\mathbf{L}$의 eigenvector가 되고 이들은 서로 수직이므로 $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$이다. 따라서 $g_{12} \equiv 0$ 이다. 이 때, 제2기본형식도 대각화되므로 $L_{12} \equiv 0$ 이다.

한편 $g_{12} \equiv L_{12} \equiv 0$ 이면, $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$ 이고, 이 basis에 대하여 II가 대각화되어 있으므로 $\mathbf{x}_i$가 $\mathbf{L}$의 eigenvector가 된다. 따라서 좌표곡선이 곡률선이 된다.

5. 2004년 1학기 중간시험

♡ 다음 각 문제의 명제(statement)가 옳으면 **T** 그르면 **F**를 써라. (쓴 답이 맞으면 **5점**, 틀리면 **−5점**, 안 쓰면 **0점**.)

(1) ( ) regular인 C^2 공간곡선을 xy-평면에 정사영한 그림자는 C^1 곡선이다.

(2) ( ) 평면곡선의 성분함수 $x(t), y(t)$가 모두 C^2 함수이더라도 이 곡선은 꺾어진 점을 가질 수 있다.

(3) ( ) 공간곡선의 torsion이 항상 0이면 이 곡선은 어떤 평면 위에 놓인다.

(4) ( ) $\kappa \neq 0$인 점에서 다음이 성립한다: $\kappa\tau = \langle \mathbf{T}', \mathbf{B}' \rangle$.

(5) ( ) helix의 축(axis)벡터 $\mathbf{u}$와 접선벡터 $\mathbf{T}$가 이루는 각을 θ라 할 때, $\tau/\kappa = \tan\theta$ 이다.

(6) ( ) 원점을 중심으로 하는 단위원주 C를 시계방향을 따라 다음 선적분을 계산한 값은 2π이다.

$$\int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

♡ 다음 문제에 알맞는 답을 골라라. (**각 10점**)

(7) 다음 보기의 벡터의 성질 가운데 바른 것만 골라 놓은 것은? ( )

ㄱ. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$	ㄴ. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$
ㄷ. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2$	ㄹ. $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \times \mathbf{g}'$

(1) ㄱ, ㄷ (2) ㄴ, ㄷ (3) ㄴ, ㄹ (4) ㄱ, ㄷ, ㄹ (5) ㄴ, ㄷ, ㄹ

(8) 다음 곡선 $\boldsymbol{\alpha}(t)$의 $t = 1$에서의 곡률로 옳은 것은? ( )

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$$

(1) 1 (2) 2/3 (3) 2/9 (4) 2/27 (5) 앞에 답 없음

(9) 다음 함수는 모든 실수 t에 대하여 무한번 미분가능한 함수이다.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0 \\ \exp(-1/t^2) & \text{if } t > 0 \end{cases}$$

이 때, 다음 곡선 $\boldsymbol{\alpha}$의 특징으로 바르지 **않은** 것은? ( )

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, f(t), f(-t))$$

(1) $t \neq 0$인 점에서는 곡률이 0이 아니다.
(2) 모든 점에서 속력이 0이 아니다.
(3) $t < 0$인 점에서의 접촉평면(osculating plane)은 xz-좌표평면이다.
(4) $t > 0$인 점에서의 principal normal vector는 xz-평면과 평행하다.
(5) 위에 답이 없다.

♡ 다음 문제를 풀어라. (**각 20점**)

(10) 다음 곡선의 Frenet-Serret apparatus를 구하여라: $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.
(11) $(x(s), y(s))$는 simple closed curve이다. $x(s)$의 최대값과 최소값의 차를 $2r$이라 할 때, 이 곡선의 둘레 L과 이 곡선이 둘러싸는 영역의 넓이 A에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$$A + \pi d^2 \leq dL$$

(1~9번 답) F, T, T, F, F, T, 2, 4, 4.

6. 2004년 1학기 학기말시험

(1) 중심이 원점에 놓인 반지름 1인 구면 S에 대하여 S에서 평면 $P = \{z = 0\}$으로 정의되는 북극점 N에서의 stereographic projection의 식을 구하고 이 때 P의 좌표 (u, v)에 대한 제1기본형식(first fundamental form)의 계수를 구하여라.(그림 참조)
(2) 앞의 문제의 곡면의 2nd fundamental form의 계수와 Christoffel의 symbol을 구하여라.
(3) 곡면의 patch $\mathbf{x} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ 와 변수변환 $f : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, $f(v^1, v^2) = (u^1, u^2)$에 대하여 $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ f$ 로 정의되는 새로운 patch를 생각할 때 $\mathbf{x}$에 대한 metric tensor g_{ij}와 $\mathbf{y}$에 대한 metric tensor $h_{\alpha\beta}$ 사이의 관계를 유도하고, 각각의 Christoffel's symbols ${}^g\Gamma_{ij}{}^k$와 ${}^h\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ 사이의 관계를 구하여라.
(4) 다음 식을 정의로부터 유도하여라.

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

(5) 구면의 polar coordinate를 써서 구면의 두 점을 잇는 가장 짧은 곡선은 대원의 일부임을 보여라.
(6) (r, z) 평면에서 직선 $z = 2r$ $(r > 0)$을 z축을 중심으로 회전하여 만든 고깔면의 곡선 $z = 2$를 따라서 평행이 되는 벡터장을 하나 구하여라.
$\boxed{\textbf{참고}}$ 회전면의 metric tensor는 $\begin{pmatrix} \dot{r}^2 + \dot{z}^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ 이고 0이 아닌 Christoffel's symbols는 $\Gamma_{12}{}^2 = \Gamma_{21}{}^2 = \dot{r}/r$, $\Gamma_{22}{}^1 = -r\dot{r}$ 이다.

7. 2007년 2학기 중간시험

(1) 내적이 있는 벡터공간에서 모든 벡터의 길이만을 사용하여 두 벡터 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 사이의 각을 알 수 있음을 보여라.

(2) $u > 0$인 uv–평면 위에 계량기가 다음과 같이 주어져 있다:

$$ds^2 = du^2 + \sinh^2 u \, dv^2.$$

이 때 이 평면에 주어진 다음 곡선의 길이를 구하여라:

$$\gamma(t) = (0, t) \quad 0 < t \leq r.$$

(3) 1학년 에서 공부한 구면좌표 (φ, θ)를 이용하여 반지름이 1인 단위구면의 계량기를 표시하여라. 또 이 좌표에 대하여 Γ_{12}^k를 계산하여라.

(4) 공간곡선 $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$와 벡터장 $W : (a, b) \to \mathbb{R}^3$가 있을 때, 곡면 X는

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\, W(u)$$

로 주어진다. 이 곡면의 가우스 곡률은 어느 점에서도 0보다 작거나 같음을 보여라.

(5) 곡면 위의 곡선의 곡률에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라:

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

(6) Codazzi-Mainardi의 다음 식을 유도하여라.

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2$$

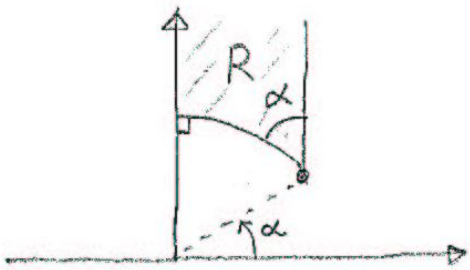
(7) 어떤 곡면 S가 평면 π와 만나는 교선의 모든 점에서 S는 π와 수직으로 만난다. 이 곡면 위에서 이 교선은 곧은선임을 보여라.

김영욱의 미분기하 학기말시험 (2007 가을)

고려대학교

♡ 다음 문제를 풀어라.

1. 쌍곡평면(상반평면모델) 위에서 다음 영역의 넓이를 구하여라.



2. 쌍곡평면(상반평면모델) 위에서 세 꼭지점 $A(-9, 3\sqrt{19}), B(0,6), C(8,10)$을 가지는 쌍곡삼각형에서 꼭지각 $\angle B$의 크기를 구하여라.

3. 쌍곡평면 위에 직선 l이 있다. l 밖의 한 점 P를 지나며 l과 수직으로 만나는 직선은 항상 존재함을 설명하여라.

4. 쌍곡평면 위에 직선 l이 있다. l 밖의 한 점 P를 지나며 l과 수직으로 만나는 직선은 단 하나뿐임을 증명하여라.

5. 쌍곡평면 상반평면모델 위에서 단위원에 대한 반사는 쌍곡계량을 보존함을 보여라.

6. 유클리드 평면 위에서 길이가 같은 선분 AB와 CD가 있다. 많아야 직선에 대한 반사 두 개를 사용해서 AB를 CD로 옮길 수 있음을 보여라.

7. 쌍곡평면의 상반평면모델에서는 쌍곡각과 유클리드 각이 같다. 원판모델에서는 어떠한지 설명하여라.