**선형대수 핵심개요** — 김영욱(고려대학교)

미분기하를 공부할 때는 선형대수는 다 잘 안다고 가정하고 시작한다. 그러나 이것은, 옛날 내게 화학을 가르쳐 주셨던 어느 선생님 말씀처럼 “꿈이요 이상일뿐 현실이 아니다.” 현실의 학생들(대학시절의 나를 포함해서)은 선형대수를 열심히 공부하지만 막상 사용하려고 하면 어떻게 할지를 모르고 “선형대수에서 어떠어떠하니까...” 하는 설명을 들으면 뭔가 그런거 같지만 정확하게는 잘 모르겠는 경우가 많다. 적어도 미분기하에서는 이것만 알면 된다 하는 식의 정리가 필요하다. 마치 흔해빠진 고등학교 참고서의 핵심공식과 같이 외워둘 거리가 필요하다.

다음 몇 가지는 이러한 요점만 정리한 것이다. 이 말들이 무슨말인지를 알아내면 선형대수를 잊어버리는 일은 일어나지 않는다고 본다. 그리고 실제에서도 잘 활용할 수 있다. 참고로 이것이 선형대수의 전부는 절대 아니다. 그러나 적어도 일상 수학에서 활용하는 선형대수의 90퍼센트는 될 것이다.

우선 선형변환, 벡터공간의 벡터 등은 $A$, $x$ 등으로 나타내고 행렬과 열벡터는 $\mathrm{A}$, $\mathbf{x}$ 등으로 나타내기로 한다. 다음에서 나타나는 기호들을 볼 때 행렬이나 벡터를 기호 하나로 쓰더라도 이것이 나타내는 행렬의 모양과 벡터의 모양을 상상하면서 사용하는 습관을 들인다.

(1) 선형대수를 공부하기 전에 행렬의 계산법을 잘 익혀야 한다: 이 부분은 매우 중요하며 많은 학생들이 이미 이 부분은 잘 하고 있다.

(2) 선형대수에 들어오면 벡터공간과 선형변환에 대하여 공부하는 것이다

(3) 벡터공간은 $\mathbb{R}^n$ 또는 $\mathbb{R}^3$ 만 생각하여도 된다.

(4) 선형변환은 행렬을 벡터에 곱하는 것이고 선형(범)함수는 한 상수벡터와 내적하는 것이다.(상수벡터의 transpose를 곱하는 것이다.)

(5) 선형대수의 목표는 단 두 가지이다. 하나는 **다변수 1차함수**의 이론을 공부하는 것이고, 또 하나는 **다변수 2차함수**의 이론을 공부하는 것이다.

(6) 1차함수를 공부할 때 필요한 내용은 좌표를 (선형변환으로) 바꿀 때, 즉, basis를 바꿀 때, 1차함수를 나타내는 행렬이 어찌 바뀌는가를 이해하는 것이다.

   답은 $\mathrm{A}$가 $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ 와 같이 바뀐다는 것이다. (따라서 similar matrix가 중요하다.) **이 계산을 꼭 구체적으로 해 보고**, 이 계산을 외울 수 있는 방법을 찾아서 외운다.

(7) 2차함수를 공부할 때 필요한 내용도 좌표를 바꿀 때 표현이 어떻게 변하는가이다. 그러나 다음과 같이 조금 복잡하다.

   (a) 우선 2차식을 어떻게 선형변환(행렬)을 써서 나타내는가?

$$\langle Ax, x\rangle = \mathbf{x}^T\mathrm{A}\mathbf{x}$$

   여기서 행렬 $\mathrm{A}$는 대칭행렬로 잡을 수 있고 꼭 이렇게 잡아야 한다.(이유는 아래에)

   (b) 좌표를 바꾸어서 $\mathbf{x} = \mathrm{P}\mathbf{y}$가 되도록 했다고 하면, 이 똑같은 2차식은 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{x}^T\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathrm{P}^T\mathrm{AP}\mathbf{y}$$

따라서 새 좌표에 대해서 쓴 2차식의 계수행렬은 $\mathrm{P}^T\mathrm{AP}$이다.

(8) 2차식을 공부하는데 가장 중요한 계산법은 eigenvalue와 eigenvector이다. (이것은 1차 함수에서는 조금 덜 중요하다.) 예를 하나 보면 잘 이해하게 된다. 간단히 하느라고 2변수 예를 들지만 사실은 $n$변수인 경우를 상상해야 왜 이렇게 어려운 방법을 쓰는지를 알게 된다.

(a) **(문제)** 원 $u^2+v^2=\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1$에서 2차식 $au^2+^2buv+cv^2=\mathbf{x}^T\mathrm{A}\mathbf{x}$의 최대최소값을 구하여라.

(b) 이 문제를 풀기 위하여 우리는 적절히 좌표변환을 해서 이 이차식의 mixed term($uv$항)이 나타나지 않도록 바꾼다. 이 말은 이차식의 계수행렬이 어떤 꼴이라는 말인가? (답은 대각행렬이라는 뜻이다.)

(c) 이 때 조건식이 변치 않으려면 좌표변환을 **직교행렬** P로 해야 한다. 그 결과 문제는 다음과 같이 변한다.

**(문제)**$'$ 원 $u'^2+v'^2=\mathbf{y}^T\mathbf{y}=\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1$에서 2차식 $\lambda u'^2+\mu v'^2=\mathbf{y}^T\mathrm{P}^T\mathrm{AP}\mathbf{y}$의 최대최소값을 구하여라.

이 문제는 풀기 쉽다. (답을 구하여 보아라.)

(d) 이렇게 변형하기 위하여는 다음과 같이 되어야 한다.

$$\mathrm{P}^T\mathrm{AP}=(\text{대각행렬})$$

그런데 우리가 P가 직교행렬이라고 가정했으므로 $\mathrm{P}^T=\mathrm{P}^{-1}$ 이다. 따라서

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=(\text{대각행렬}),\quad \text{즉},\quad \mathrm{AP}=\mathrm{P}(\text{대각행렬})$$

이면 된다. 이 마지막 식을 써 보면 P의 열벡터가 A의 (서로 수직이고 단위벡터인) eigenvector이고, 대각행렬의 대각선의 entry가 A의 eigenvalue라는 뜻이다.

(e) 이것이 항상 가능한가? 그렇다. 대칭행렬은 항상 실수 eigenvalue를 가지고 이 때 eigenvector로 basis를 만들 수 있다. 즉, 위의 invertible P를 항상 찾을 수 있다.

(f) 위에서 어떻게 모든 조건(대각, 대칭, 직교, transpose, inverse 등)이 교묘하게 맞아들어가는지를 보아야 한다.