미분기하 Crash Course
가우스 – 보네의 정리

김영욱

고려대학교 이과대학 수학과

2011 봄

접하는 선직면의 구성

주어진 곡면 Σ 위의 작은 삼각형이 측지좌표계 $\mathbf{y}(u^1, u^2)$ 안에 놓여 있다고 하자. 이 측지좌표계의 계량은 다음과 같이 주어진다고 하자 :

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & \overline{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \overline{h}^2 \end{bmatrix}.$$

경계선에서 곡면에 접하는 선직면 이 삼각형의 한 변을 이루는 곡선을 $\alpha(s)$ 라 하고 α 는 unit speed 라고 가정하자. α 의 측지곡률은 $\kappa_g = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{T}'$ 이므로 곡선 α 를 품으며 α 를 따라서 $\mathbf{n}$ 이 일치하는 곡면 위에서 κ_g 는 모두 같다. 그러므로 측지곡률을 이해하기 위해서 Σ 위에서 α 의 근방을 가장 쉬운 곡면으로 바꾸어 보자. 그리고 각 점 $\alpha(s)$ 에서 곡면 Σ 의 법벡터 $\mathbf{n}(s)$ 를 사용하여 $\mathbf{u}(s) = \mathbf{n}(s) \times \alpha'(s)$ 로 정의하자. 이것은 이 곡선 α 의 intrinsic normal vector가 된다. 이제 다음 선직면을 생각하자 :

$$\mathbf{x}(r, s) = \alpha(s) - r\mathbf{u}(s).$$

여기서 $\|\alpha'\| = 1$, $\|u\| = 1$ 이고 $\alpha' = \mathbf{T}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{n}$ 은 orthonormal frame을 이룬다. 이 frame은 Darboux Frame이라고 한다. 또, $\alpha'' \cdot \mathbf{u} + \alpha' \cdot \mathbf{u}' = 0$ 이므로

$$\kappa_g = \alpha'' \cdot \mathbf{u} = -\alpha' \cdot \mathbf{u}'$$

이 된다. 이제

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}_2 = \alpha' - r\mathbf{u}'$$

이므로 이 선직면의 제1기본형식의 계수를 계산하면

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1 - 2r\alpha' \cdot \mathbf{u}' + r^2\|\mathbf{u}'\|^2 = 1 + 2r\kappa_g + r^2\|\mathbf{u}'\|^2$$

을 얻는다.

한 변에서의 계산

크리스토펠 기호 계산 계량이 $\begin{bmatrix} 1 & \\ & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & h^2 \end{bmatrix}$ 로 주어져 있는 측지좌표계의 크리스토펠 기호를 공식에 따라 계산해 보면 다음과 같다:

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{G_1}{2G} = \frac{h_1}{h}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_1}{2} = -h_1 h, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_2}{2G} = \frac{h_2}{h}.$$

이 밖의 크리스토펠 기호는 모두 0 값을 갖는다.[1]

한편 특별히 α를 따라서 정의된 측지좌표계인 경우에는 곡선 α를 따라서 $r = 0$이므로, $G_1 = 2h_1 = 2\kappa_g$가 되어 다음과 같다(나머지는 모두 0이다):

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \kappa_g, \quad \Gamma_{22}^1 = -\kappa_g, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

평행인 벡터장의 방정식 따라서 접벡터장 $\mathbf{P} = X^i \mathbf{x}_i = Y^i \mathbf{y}_i$가 α를 따라 평행일 조건식을 구해보자. 우선 $\mathbf{x}$에 대한 방정식은

$$(X^1)' + \kappa_g X^2 = 0, \quad (X^2)' - \kappa_g X^1 = 0$$

이다. 한편 $\mathbf{y}$에 대한 방정식은 조금 복잡하지만 우리가 필요한 것은 이중 하나만 있으면 된다. 이것은

$$(Y^1)' + \Gamma_{22}^1 Y^2 (\alpha_{\mathbf{y}}^2)' = 0 \quad \text{즉,} \quad (Y^1)' - \bar{h}_1 \bar{h} Y^2 (\alpha_{\mathbf{y}}^2)' = 0$$

이다. ($(Y^2)'$의 관계식도 구해볼 것.)

Darboux의 Frenet-Serret 공식 제2기본형식의 계수를 구해 보자. α를 따라서 $r = 0$이므로

$$\mathbf{x}_{11} = 0, \quad \mathbf{x}_{12} = \mathbf{u}', \quad \mathbf{x}_{22} = \alpha'' - 0\mathbf{u}'' = \mathbf{T}'$$

이 되고, 따라서 각각

$$l = 0, \quad m = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n}' \cdot \mathbf{u} = \mathrm{II}(\mathbf{T}, \mathbf{u}), \quad n = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n}' \cdot \mathbf{T} = \kappa_n$$

이다. 이로부터 이 곡선의 Darboux frame에 대한 Frenet-Serret 공식을 써 보면 다음과 같다.[2]

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \qquad \kappa_g\,\mathbf{u} + \kappa_n\,\mathbf{n} = \qquad \kappa_g\,\mathbf{u} + n\,\mathbf{n} \\ \mathbf{u}' &= -\kappa_g\,\mathbf{T} \qquad + m\,\mathbf{n} = -\kappa_g\,\mathbf{T} \qquad + m\,\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa_n\,\mathbf{T} - m\,\mathbf{u} \qquad = -n\,\mathbf{T} - m\,\mathbf{u} \end{aligned}$$

[1] α를 따라 $h_1 = \kappa_g$이므로 이 식의 양변을 적분하면 아래 가우스–보네 공식의 유도방법과 유사한 계산을 통해 가우스 곡률의 적분과 측지곡률의 경계적분 사이의 관계를 얻을 수 있을 듯이 보이지만 이 계산은 경계의 근방에서만 성립하며 내부 전체로 확장할 수 없다. 따라서 삼각형 내부 전체를 한 번에 계산할 수 있는 좌표계의 도입이 필수적이다.

[2] Millman과 Parker의 교과서 127쪽 문제 7.7 참조.

평행인 접벡터장의 도입

$\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1$ 과 $\mathbf{P}$ 사잇각의 변화율 (θ, ϕ와 ψ) 한편 α를 따라 평행인 단위접벡터장 $\mathbf{P} = X^i \mathbf{x}_i = X^1 \mathbf{u} + X^2 \alpha' = Y^i \mathbf{y}_i$ 에 대하여 $\phi = \angle(\mathbf{y}_1, \mathbf{P}), \theta = \angle(\mathbf{P}, \alpha')$, 따라서 $\psi = \angle(\mathbf{y}_1, \alpha') = \phi + \theta$ 라 놓자.

우선 $X^1 = -\sin\theta, X^2 = \cos\theta$ 가 되어 이 식을 미분하면

$$-\theta' \sin\theta = (X^2)' = \kappa_g X^1 = -\kappa_g \sin\theta, \quad \text{즉} \quad \kappa_g = \theta' \tag{1}$$

을 얻는다. 한편

$$\mathbf{P} = Y^1 \mathbf{y}_1 + Y^2 \mathbf{y}_2 = \cos\phi \mathbf{y}_1 + \sin\phi J \mathbf{y}_1 = \cos\phi \mathbf{y}_1 + \frac{\sin\phi}{\overline{h}} \mathbf{y}_2$$

이므로 $Y^1 = \cos\phi, Y^2 = (\sin\phi)/\overline{h}$ 가 된다. 이 앞 식을 미분하면

$$-\phi' \sin\phi = (Y^1)' = \overline{h}_1 \overline{h} Y^2 (\alpha^2_{\mathbf{y}})' = \overline{h}_1 \overline{h} \frac{\sin\phi}{\overline{h}} (\alpha^2_{\mathbf{y}})' = \overline{h}_1 \sin\phi (\alpha^2_{\mathbf{y}})'$$

가 되어

$$\phi' = -\overline{h}_1 (\alpha^2_{\mathbf{y}})' \tag{2}$$

을 얻는다.

가우스–보네의 정리 (2)로부터

$$\begin{aligned}\int_{\text{경계}} d\phi = \int_{\text{경계}} \phi'\, ds &= -\int_{\text{경계}} \overline{h}_1 (\alpha^2_{\mathbf{y}})' ds \\ &= -\int_{\text{경계}} \overline{h}_1\, du^2 = -\int_{\text{경계}} \overline{h}_{11}\, du^1\, du^2 = \iint K\, dA\end{aligned}$$

이다. 한편 $\mathbf{y}_1$ 에 대한 $\mathbf{T}$ 의 방향 변화의 총량은 2π 이다. 즉

$$\int_{\text{경계}} d\psi + (\text{외각의합}) = 2\pi$$

이다. 따라서 (1)로부터

$$\begin{aligned}2\pi &= \int_{\text{경계}} d\psi + (\text{외각의합}) = \int_{\text{경계}} d\phi + \int_{\text{경계}} d\theta + (\text{외각의합}) \\ &= \iint K\, dA + \int_{\text{경계}} \kappa_g\, ds + (\text{외각의합})\end{aligned}$$

이다.