대학교 수학과에서 공부하는 수학

김영욱
고려대학교 이과대학 수학과

2011년 7월
EBS

시작

이 강의에서 설명하고자 하는 것은, 대학교에 들어과서 수학 수업에서 공부하는 목표를 알아봄으로써 고등학교에서 공부하는 수학의 기법과는 달리 새로운 수학 기법을 이해하고 이를 통하여 단순한 계산을 벗어난 수학의 새로운 관점을 맛보려는 것이다.

이 강의는 대학교 전공 수학의 중심이 되는 “20세기 이론 수학의 핵심을 짚어보려는 것” 으로 이 다음에 계속되는 포항공과대학 김강태 교수님의 강의에서 알아보는 “현대수학이 현실적인 문제에 어떻게 활용되는가” 와 함께 쌍을 이루어 수학의 “이론과 실제” 를 알아보는 강의이다.

서양 수학 발전

동양 수학은 2000년도 더 전부터 꾸준히 발전해 온 것에 비하여 서양 수학은 그렇지 못하였다. 고대 그리스에서 유럽 수학의 모태가 되는 수학이 발전한 것에 비하면 적어도 1000년 이상 수학은 설 자리를 찾지 못하였고 간신히 명맥만을 유지하여 왔다. 그러나 중세가 지나가고 르네상스가 오면서부터 수학은 매우 빠른 속도로 발전하기 시작하였으며 19세기가 끝나갈 무렵에는 이론적인 수학 계산에서 못할 것은 없다고 생각될 정도로 수학이 발전되었다.

이러한 발전의 댓가는 수학의 방법이 매우 많이 늘어나고 복잡해졌다는 것이며, 이전과 같이 단순한 공식을 기억해서 문제를 해결할 수 없는 수준, 특히 한 사람이 모든 수학 이론을 이해할 수 없는 수준에 이르렀다는 것이다. 따라서 이를 잘 활용하기 위해서는 더욱 효율적인 방법이 필요하게 되었다. 우리는 이러한 효율적 방법을 어찌 찾는지에 대하여 알아보려고 한다.

공부의 대 원칙

이러한 발전 과정에서 알아내게 된 기본적인 방법론은 두 가지로 설명할 수 있다. 그 첫 번째는 이미 중 고등학교에서 열심히 공부하면서 배운 방법이다. 이 방법은 이미 잘 정립되고 잘 알고 있는 수학의 이론을 적용하여 문제를 해결할 때 쓰는 방법으로 주어진 문제를 단순화 시켜서 미지수를 줄이고 식을 간단히 하고 하여 구하는 답으로 좁혀나가는 방법이다. 이 방법은 문제를 아주 잘 이해하고 있을 때 매우 효율적인 방법이지만, 문제에 대하여 아주 잘 알고 있지 못하면 적용하기 힘든 방법이기도 하다.

반면에 이 강의에서 설명하려고 하는 방법은, 잘 알고 있지 못한 새로운 문제를 풀려고 할 때이다. 이 방법은 위의 방법과는 정 반대로 문제를 더욱 더 복잡하게 만들어서 문제에 대한 이해를 높이는 방법이다. 문제를 간단히 만들어서는 문제에서 답을 구할 수는 있지만 문제를 이해하는 데는 도움되지 않는다는 사실을 알고나면 이 방법에 수긍이 가는 점이 있다.

예를 들면

고등학교 때 까지도 이런 방법이 동원되기는 했었는데 별로 설명을 많이 하지는 않았다.

예를 들면 2차방정식의 이론을 잘 알고 방정식을 풀어 근을 구할 때는 방정식을 완전제곱 꼴로 고쳐 단순한 제곱 방정식 $x^2 = a$ 꼴로 고친 다음 양변의 제곱근을 구한다. 이는 방정식의 2차함수의 그래프를 평행이동하여, 그 대칭축을 y축에 옮겨, 1차항을 소거하는 단순화시키는 방법이다.

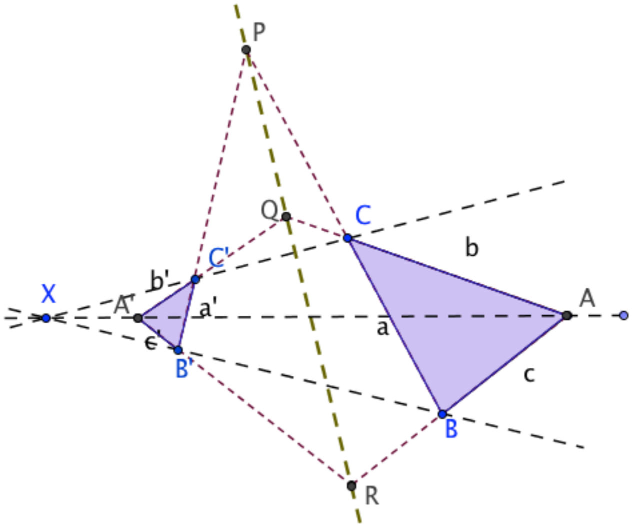
그러나 2차방정식의 이론을 모르는 사람은 그 반대 방법을 써야 한다. 즉, 단순히 주어지 한 개의 2차방정식을 보아서는 무엇을 할지 잘 알 수가 없다. 이 방정식과 유사한 여러 개의 방정식을 보다 보면 2차함수의 그래프의 대칭축이 y축 위에 올 때 풀기 쉽다는 것을 알 수 있고 다른 방정식을 이렇게 고치는 방법을 찾아나가게 된다. 즉 방정식 하나에서 여러 개로 관점을 넓히고 그 사이의 유기적 관계를 바라보면 풀이법을 알 수 있다는 방법을 쓴다.

복잡하게 만드는 방법

복잡하게 만드는 방법에는 여러 가지 방법이 있다. 그 가운데 기초적인 몇 가지를 뽑아 자료에 나열하였다. 우리는 이러한 방법을 알아보기 위하여 한 가지 문제를 잡고 이 몇 가지 방법이 이 한 문제에서 어떤 식으로 작용하는지를 보려고 한다. 이 과정에서 우리가 알고 싶은 것은 단지 이런 방법이 어떻게 쓰이는가 하는 것이며 이 정리의 증명을 제대로 알아보려는 것은 아니다. 따라서 이의 수학적 내용은 조금 간략하게, 증명도 개략적인 방법론만을 설명한다.

우리가 알아보려는 방법은 변수를 더 넣어 차원을 높이는 방법과 문제를 바라보는 관점을 바꾸어 보는 것이다.

데자르그 정리의 소개



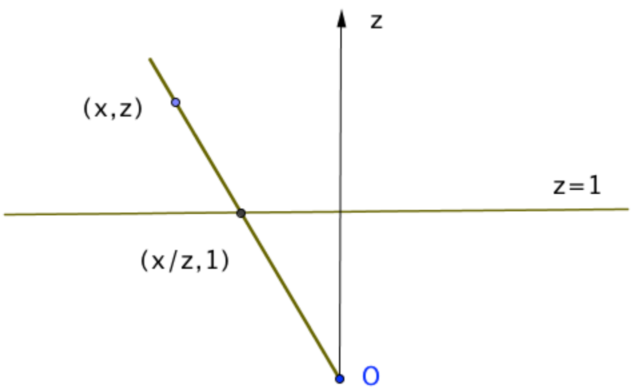
데자르그의 정리는 근대수학 발전의 초기에 나타난 매우 유명한 정리로서 지금까지도 매우 여러 곳에 응용되는 중요한 정리이다.

그 내용은 다음과 같다. 주어진 한 점 X를 지나서 세 개의 직선이 있다. 그림과 같이 이 세 직선 위에 각각의 꼭지점(A, A' 등등)이 하나씩 놓인 삼각형 두 개가 있다고 하자. 그러면 이 두 삼각형의 각 변을 연장하였을 때 서로 대응하는 변(예를 들면 a와 a')들의 교점 세 개(P, Q, R)는 한 직선위에 놓인다는 것이다.

이 정리를 그냥 증명하는 것은 상당히 복잡할 뿐만 아니라, 이 증명에서 '이 정리가 왜 성립할까'를 이해하는데 도움을 얻기도 만만치 않다.

차원을 높인다 (1)

차원을 높이는 방법의 하나인 동차좌표라는 기법을 보자.



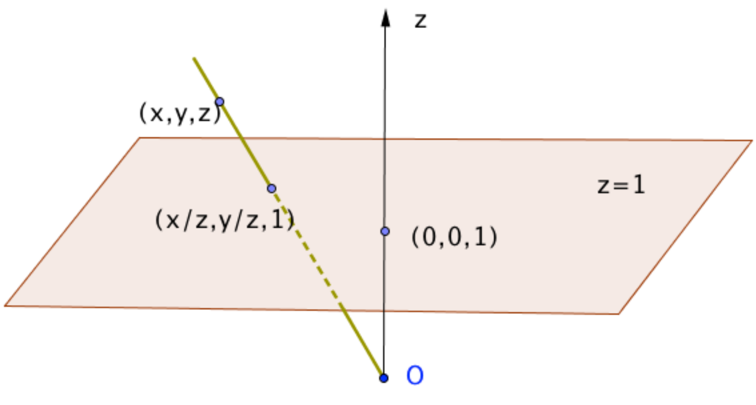
우선 쉽게 1차원 직선을 생각해 본다. 우리가 직선 위에서 수학을 공부하는 방법은 직선 위에 좌표를 주어 수직선을 만들고 우리 공부를 이 좌표의 계산으로 바꾸는 것이다. 이러한 방법을 처음 준 것은 데카르트이며 이 방법을 너무 혁신적인 방법이어서 현대 수학에서 없으면 안 되는 기법이다.

그런데 우리는 직선을 공부하는데 이 직선 위에 좌표를 준 것만으로 만족하지 않는다. 직선을 (x, z) 평면 위에 $z = 1$ 위치에 놓고 나는 원점 $(0, 0)$ 에서 직선을 바라본다. 그러면 직선의 각 점이 내 눈에 보인다. 그러나 내가 원점에서 바라보는 것만으로는 그 위의 점이 나로부터 얼마나 떨어져있는지 알 수 없다. 그러니까 내 눈에 보이는 점이 마치 (x, z) 에 있는 것처럼 보이면 이것은 직선 $z = 1$ 위에 있는 점 $(x/z, 1)$ 과 겹쳐보이게 된다. 실제로 공간에서 이 두 점은 서로 다른 점이지만 나한테는 이 두 점에 차이가 없다.

이런 생각을 뒤집어 보자. 즉 수직선 $z = 1$ 위에 있는 점 x/z 은 평면 위에서는 좌표가 $(x/z, 1)$ 이다. 우리는 이 점의 z 좌표는 1 이라는 것을 알고 있지만, 마치 내가 원점에서 바라보고 있어서 이 점이 $z = 1$ 위에 있는지 모른다고 가정하고 보면 이 점은 $(x/z, 1)$ 일 수도 있고 (x, z) 일 수도 있다. 이 직선 위의 점이지만 내가 모르면 이 두 좌표가 다 그 점일 수 있으니까 그 점의 좌표로 (x, z) 와 $(x/z, 1)$ 을 모두 쓰자는 발상을 할 수 있다. 나아가서 원점에서 이 점을 바라보는 직선 위에 있는 모든 점의 좌표를 모두 이 점 x/z 를 나타내는 좌표로 쓰자는 생각이다. 이런 생각은 쓸데 없어 보이지만 실제로는 도움이 많이 된다.

차원을 높인다 (2)

이제 이 방법을 2차원 평면에 적용해보자.

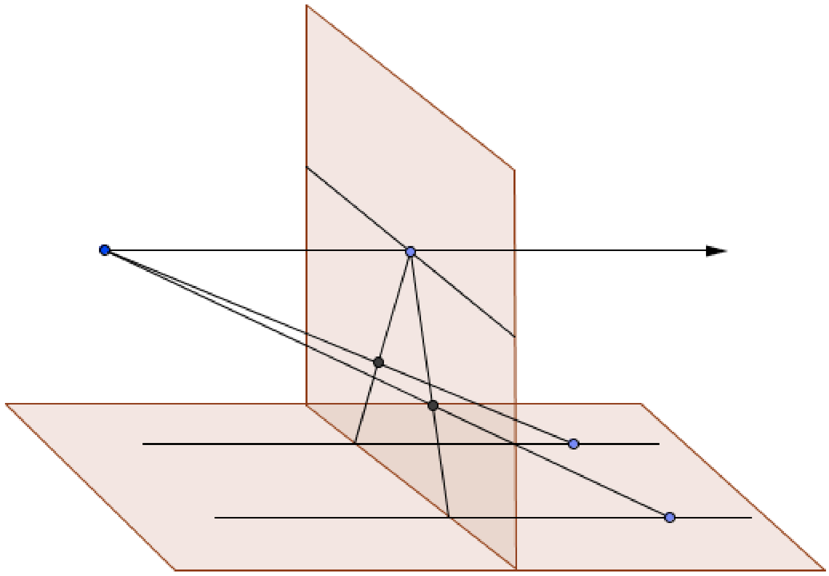


우선 평면의 모든 점은 두 개의 실수로 이루어진 좌표 (x_0, y_0) 를 갖는다. 위와 같이 이 평면을 3차원 공간에서 $z = 1$ 에 놓고 원점에서 바라보면서 서로 겹쳐보이는 점의 좌표 (x, y, z) 와 같은 것을 이것이 겹쳐보이는 평면 $z = 1$ 위의 좌표로 사용하기로

한다. 즉 평면 위의 점 $(x/z, y/z)$는 이 평면 좌표 대신에 공간좌표 (x, y, z)로 나타내기로 한다. 즉 이 점 하나에 서로 겹쳐보이는 모든 공간좌표 $(tx, ty, tz)(t \neq 0)$를 쓸 수 있게 한다.

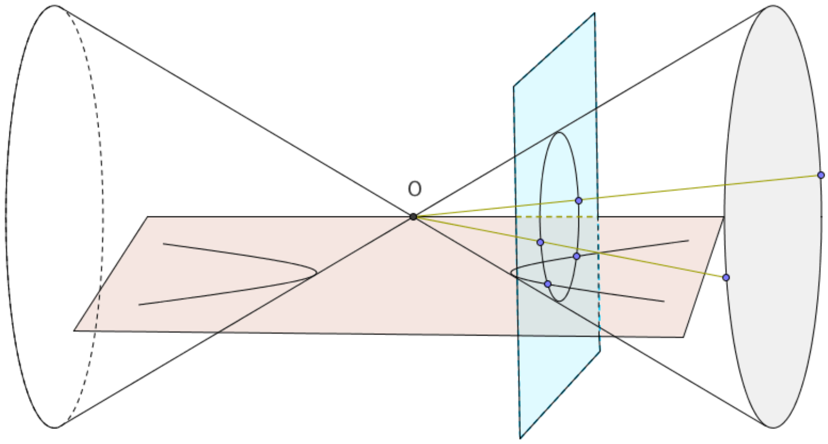
이 방법을 쓰면 평면의 좌표로 두 실수가 아니라 세 실수를 쓰게 하고, 또 한 점의 좌표가 하나가 아니라 여러 개가 있으니까 복잡해진 것이다. 그러나 이렇게 하면 다음과 같은 이점이 있다.

동차좌표의 이점 (1)



그림의 바닥 평면에 두 개의 평행한 직선이 있다. 이 직선이 나란한 길의 두 변이거나 기찻길의 선로라고 생각하자. 이제 내가 이 평면 밖의 한 점에 있고 이 평면에 수직으로 캔버스를 세워서 내가 겹쳐 보이는 그대로 캔버스 위에 이 땅의 그림을 옮겨그린다고 하자. 그러면 나란한 선로 위의 점들은 캔버스로 옮겨오면 직선이 되지만 이 직선은 평행하지 않고 점점 다가와서 한 점에서 만난다. 이 만나는 점은 보통 소실점이라고 부르는 것이 되고, 이 캔버스 위에는 이 바닥 평면의 지평선이 그려진다. 이 지평선 위의 점은 바닥 평면에는 없는 것이지만 동차좌표를 쓰면 z 값이 0이 되는 점으로 나타난다. 그리고 이 바닥에서 평행한 직선은 캔버스에서 보면 소실점에서 만나는 직선이 된다. 즉 동차좌표를 쓰면 평행한 직선은 무한히 먼 점 (무한원점) 인 지평선 위에서 만나는 직선이라고 말할 수 있게 된다. 그리고 어떤 두 직선도 다 만난다고 바꾸어 말할 수 있게 된다.

동차좌표의 이점 (2)



원뿔곡선을 보자. 그림처럼 주어진 원뿔을 두 가지 평면으로 자르면 원(타원)과 쌍곡선이 나온다. 그러나 원뿔의 꼭지점을 원점으로 하고 거기서 바라보면 이 두 곡선은 정확히 원뿔을 따라 겹쳐보이며 따라서 동차좌표에서는 이 두 곡선이 별로 다르게 보이지 않는다. 예를 들면 두 곡선 다 동차좌표로는 방정식 $x^2 - y^2 - z^2 = 0$이라는 방정식이 된다.

이 때 원점에서 바라보아 겹쳐지도록 한점 한점 원과 쌍곡선을 대응시키며 보면 원위의 두 점은 쌍곡선의 점과 대응되지 않는다. 이 두 점은 쌍곡선에서는 무한히 먼 점이 되지만 원 위에서는 정상적인 점으로 보이고 이 점을 경계로 원의 위쪽과 아래쪽 부분은 각각 쌍곡선의 두 부분과 1대1 대응을 한다. 다시 말해서 쌍곡선의 두 부분을 무한히 먼 점에서 마주 붙여서 원을 만드는 방법을 보여준다.

쌍대성 : 관점을 바꾸어 본다

관점을 바꾸어 보는 대표적인 방법으로 쌍대성이라는 것이 있다. 가장 쉬운 경우로 평면의 점과 직선의 관계를 본다. 그냥은 조금 어설퍼 보이지만 위에서 공부한 동차좌표를 보면 이것이 매우 잘 보인다.

평면의 점들은 동차좌표를 쓰면 (x, y, z)와 같이 나타낼 수 있다. 이 점의 예전 좌표인 $(x/z, y/z)$가 어떤 직선 위에 놓이면 직선의 방정식을 써서 이 점이 이 직선 위에 놓인다는 사실을 다음 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + 1 = 0$$

이제 이 방정식을 다시 써 보면

$$ax + by + cz = 0$$

이라 쓸 수 있고 동차좌표를 써서 점이 직선 위에 있다는 관계식이 된다.

그런데 이 관계식을 잘 보면 결국 세 실수 (x, y, z)는 점을 나타내고 세 실수 (a, b, c)는 직선을 나타낸다. 그리고 점과 직선을 나타내는 세 실수의 쌍은 서로 똑같은 모양이다. 즉 점이나 직선이나 똑 같은 정보를 가지고 나타내게 된다.

그러니까 **관점을 바꾸어** 점과 직선의 역할을 바꾸어 보자. 즉 (x, y, z)는 직선의 방정식의 계수이고 (a, b, c)는 점의 좌표라고 생각하는 것이다. (이 점의 좌표도 동차좌표이다.) 그러면 이 새 직선이 새 점을 지난다는 것은 다음 방정식이 된다.

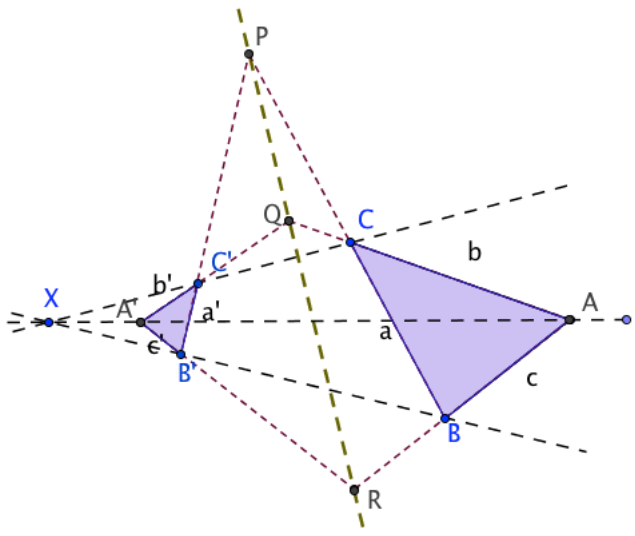
$$xa + yb + zc = 0$$

그리고 이 방정식은 위의 방정식과 똑같다. 즉 점이 직선위에 있다는 것은 점과 직선의 역할을 바꾸어서 직선이 점을 지난다고 할 때 그 수학적인 관계는 변하는 것이 없다.

이 말은 어떤 명제에서 "어떤 점이 어떤 직선 위에 놓인다"는 관계가 참이라면 여기서 똑같은 말을 관점을 바꾸어 새로 쓴 "어떤 직선이 어떤 점을 지난다"는 관계도 참이라는 말이다. 나아가서 어떤 정리의 증명에서 직선과 점의 역할을 완전히 바꾸어 써도 원래 증명이 맞으면 새로 쓴 말도 맞으니까, 원래 정리에서 점과 직선의 역할을 바꾼 정리도 옳게 된다는 말이다.

이렇게 점과 직선을 서로 바꿀 수 있는 관계를 쌍대성이라고 부른다.

쌍대성과 데자르그 정리

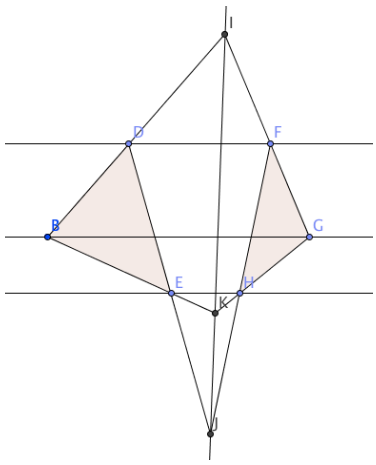


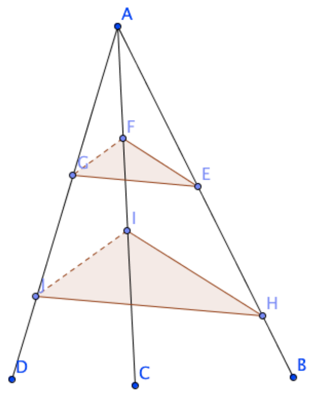
이 말을 따라서 데자르그 정리를 다시 써본다. "점 X는 직선 X라고 고친다." 이런 식으로 "주어진 한 직선 X 위에 놓이는 세 점이 있다. 이 세 점을 지나는 직선이 각각 두 개씩 있어서 이 가운데 하나씩으로 만든 세 직선이 만드는 삼각형 두 개를 생각할

때 이 두 삼각형의 서로 대응하는 꼭지점을 이어 만든 세 직선은 한 점에서 만난다" 라는 새로운 정리를 얻게 되고 원래 정리가 참이라면 이 새 정리도 참이 된다.

그림을 따라 잘 보면 이 새 정리에서 처음 주어진 직선 X를 점 P, Q, R을 지나는 직선이라고 생각하고 보면 이 새 정리는 원래 데자르그 정리의 역 정리임을 알 수 있다. 즉 데자르그 정리를 쌍대적으로 고쳐 쓰면 자신의 역 정리가 되고, 따라서 데자르그 정리를 증명하면 그의 역 정리는 자동으로 증명된다.

동차좌표와 데자르그 정리





데자르그 정리에서 동차좌표를 써 보자. 예를 들어 데자르그 정리의 점 X가 소실점과 같은 점이라면, 즉 이 점이 무한원점이 된다면 이 점을 지나는 세 직선은 평면 위에서는 서로 평행한 세 직선이라는 말이 된다. 따라서 동차좌표로 보면 서로 평행한 세 직선에 대하여도 성립하는 또 다른 정리가 데자르그 정리와 똑같은 말로 쓸 수 있음을 알 수 있다. 이는 왼쪽 그림과 같은 경우이다.

또 다른 경우로 두 삼각형에서 대응하는 변끼리 연장하여도 평행하고 만나지 않는 경우이다. 이 경우 두 쌍의 대응하는 변이 평행하면 세 번째 변도 서로 평행하다는 정리가 되지만 이는 동차좌표를 쓰면 세 쌍 모두 무한원점 (지평선) 에서 만난다는 말이 되어 데자르그 정리의 특수한 경우가 된다.

즉 여러 유사하면서도 특수한 정리가 유클리드 평면에서는 서로 다른 정리가 되고, 증명도 따로 따로 하여야 하지만 동차좌표를 쓰면 한 개의 정리로 증명도 한 번만 하면 되는 이점이 생긴다.

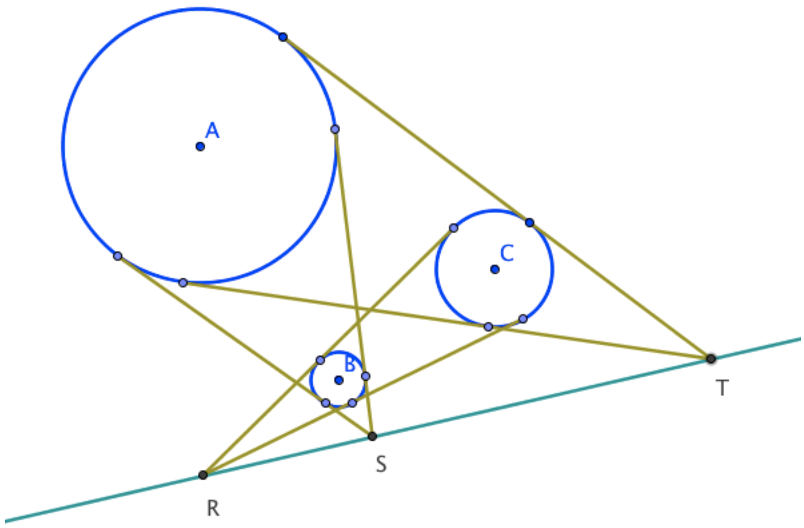
복잡하게 만들기 : 데자르그 정리의 증명

데자르그 정리를 증명하는데 새로운 방법을 사용하면 이해도 쉽고 증명도 쉽다. 여기서는 자세한 사항은 따지지 않고 아이디어만 보면서 어떻게 해서 쉽게 생각하는가만 본다.

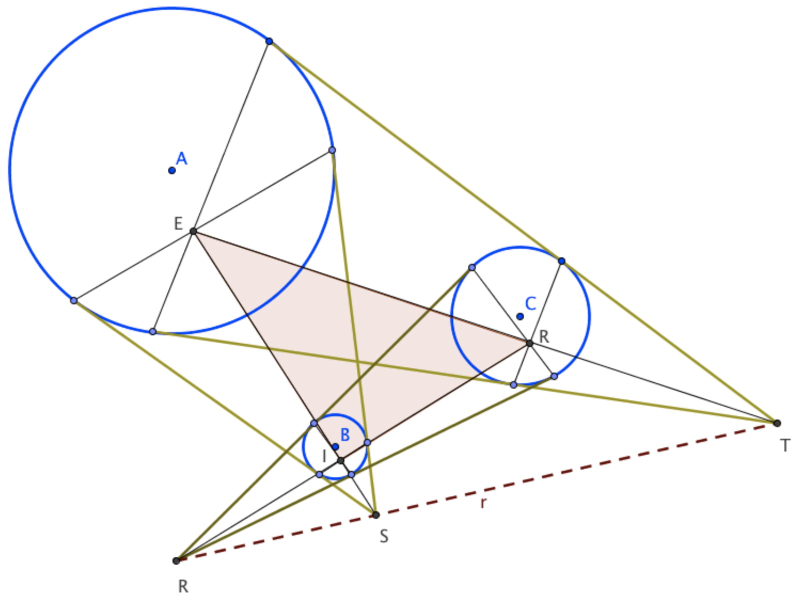
아이디어는 차원을 높여보는 것이다. 설명과 같이 평면 위의 그림을 내려다 보면서 이것이 납작하지 않고 실제는 입체적이라고 상상하는 것이다. 이것은 바라보는 방향의 차원을 하나 더 넣어서 차원을 높여 보는 대표적인 예이다. 이 때 세 점 P, Q, R은 모두 각각의 삼각형을 포함하는 평면 위에 놓여야 하며 이 두 평면은 서로 달라서 한 직선에서 만나므로 이 세 점도 이 교선 위에 놓인다는 사실로부터 이 세 점이 일직선 위에 있다는 것을 쉽게 알 수 있다. 그리고 이런 정리가 성리하는 이유도 조금 더 잘 알게 된다.

복잡하게 만드는 방법 : 응용

이제 위의 데자르그 정리와 유사하게 차원을 높여 봄으로써 쉽게 이해되는 경우를 하나 더 보기로 하자.



주어진 그림은 세 개의 서로 떨어져 있는 원과 이들의 바깥쪽에서 그은 공통접선들이다. 한 쌍의 원의 두 바깥쪽 공통접선이 만나는 점을 하나씩 잡으면 세 교점이 나온다. 이 세 교점 R, S, T는 한 직선 위에 놓인다. 이것을 쉽게 알아보는 한 가지 방법은 이를 입체적으로 보는 것이다.



예를 들어 점 A, C, T를 잇는 직선을 축으로 원 A와 원 C와 그 공통접선을 모두 회전시켜보면 그림은 구 A와 구 C와 그에 공통으로 접하며 T를 꼭지점으로 하는 원뿔을 보고 있는 것과 같다. 마찬가지로 점 R을 꼭지점으로 갖는 원뿔은 구 B와 C에 공통으로 접하며 점 S를 꼭지점으로 하는 원뿔은 구 A와 구 C에 공통으로 접한다. 이제 이 중에서 두 원뿔이 구 A에 접하는 점들을 이어보면 두 개의 소원이 되는데 이 두 소원의 교점은 이 두 원뿔의 공통접점 E이다. 또 구 B에 접하는 두 원뿔의 공통접점 I와 구 C에 접하는 두 원뿔의 공통접점 R 등 세 점을 지나는 평면은 구 A와 구 C에 접하며 점 T를 지나게 된다. 마찬가지로 이 평면은 구 A와 구 B에 접하며 점 S를 지나고, 또 구 B와 구 C에 접하며 점 R을 지난다.

따라서 삼각형 EIR을 연장한 평면 위에 있는 세 점 R, S, T는 동시에 바닥평면 위에도 있으므로 이 평면과 바닥평면의 교선 위에 이어야 하고 따라서 한 직선 위에 놓일 수 밖에 없는 것을 알 수 있다.

우리가 하여야 할 것

결국 우리가 하려는 것은 이러한 방법을 공부하여 새로운 문제에 마주칠 때 이를 해결해 나가는 방법을 익히는 것이다. 21세기에 들어서면서 더욱더 이미 알고 있는 방법을 적용하는 것 외에 아직 잘 모르는 문제를 해결해야 할 필요성이 늘고 있다.

이러한 능력을 가진 사람을 창의적 문제해결력을 가진 사람이라고 부른다. 이런 사람을 기르기 위해서 대학에서는 예전보다 훨씬 더 많은 시간을 이런 창의적 생각을 할 수 있도록 하는 수업에 할애한다. 이를 효율적으로 익히기 위해서는 모든 문제를 공부할 때 단순히 푸는 방법을 익히기보다는 어떻게 해서 이런 방법을 찾을 수 있었을까를 염두에 두고 공부해야 한다.

그리고 수학과에서는 이러한 창의적 생각에 도움이 되는 기법들을 공부하도록 유도한다. 이 가운데 주로 1차, 2차함수를 추상적으로 바라보는 방법, 연속함수의 성질을 잘 이해하는 방법, 최대, 최소 문제를 잘 이해하는 방법, 주어진 상황의 추상적인 모양을 이해하는 방법, 알고리즘을 잘 활용하는 방법 등을 공부한다.

다음 시간에는

다음 시간에는 포항공과대학의 김강태교수님에게서 이러한 수학이 현실적인 문제에 적용되는 모습을 한 두 가지 예를 통해 알아본다. 여기서는 이 시간에 알아보지 못한 연속 함수의 성질을 활용함으로써 문제 해결에 도움이 되는 문제를 알아본다.