미분기하 한시간에 끝내기

An Hour Crash Course in Differential Geometry

김영욱

고려대학교 수학과

2011 년 5 월 12 일
전남대학교에서

차 례

곡선의 이론

곡선의 기본 재료

1. Regular curve: $\alpha' \neq 0$.
2. Arclength parameter s.
3. α, **T**, **N**, **B**, κ, τ.

Frenet-Serret 정리

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \kappa\mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= -\tau\mathbf{N} \end{aligned} \quad \text{즉,} \quad \begin{bmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}$$

곡선의 이론

곡선의 기본 재료

1. Regular curve: $\alpha' \neq 0$.
2. Arclength parameter s.
3. α, **T**, **N**, **B**, κ, τ.

Frenet-Serret 정리

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \kappa\mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= -\tau\mathbf{N} \end{aligned} \quad \text{즉,} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

parameter t에 대한 몇 가지 공식

1. $\mathbf{T} = \dot{\alpha}/|\dot{\alpha}|$,
2. $\mathbf{B} = \dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}/|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|$,
3. $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$,
4. $\kappa = |\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|/|\dot{\alpha}|^3$,
5. $\tau = \dot{\alpha} \cdot (\ddot{\alpha} \times \dddot{\alpha})/|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2$.

중요한 결과들

- 구면 위의 곡선.
- 일반 나선 *general helix*.
- 베르트랑의 곡선 쌍 *Bertrand curves*.
- 신개선과 축폐선 *involutes and evolutes*.
- 평면곡선의 회전수*rotation index*와 그린 정리.
- 등주부등식 *isoperimetric inequality*.

차 례

곡면의 이론

곡면의 기본 재료

1. Regular 곡면 $\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{x}(u, v)$,
   그 위의 곡선 $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{x}\big(\gamma^1(t), \gamma^2(t)\big)$
2. 접벡터의 basis $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ (편미분), 곡면법선벡터 $\mathbf{n}$,
3. 1^{st} F. F., 2^{nd} F. F.과 그 계수들 $g_{ij}(= E, F, G)$, g^{ij}, $L_{ij}(= l, m, n)$,
4. 법곡률 *normal curvature* κ_n,
   측지곡률 *geodesic curvature* κ_g
5. 크리스토펠 기호 Γ^l_{ij}

곡면의 기본 공식

1. $x_{ij} = L_{ij}\mathbf{n} + \Gamma_{ij}^{k}\mathbf{x}_k$ (가우스 공식),
2. $\Gamma_{ij}^{l} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}\right)$,
3. $\kappa_n = L_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j$,
4. $\kappa_g\mathbf{u} = \left(\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^{k}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j\right)\mathbf{x}_k$ ($\mathbf{u}$는 intrinsic normal),
5. (extrinsic) $\kappa_n = \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}$,
   $\kappa_g = \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \times \dot{\mathbf{T}} = \kappa\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$,
6. $\mathbf{n}_i = L_i^k\mathbf{x}_k = L_{ij}g^{jk}\mathbf{x}_k$,
7. $R_i{}^l{}_{jk} := \Gamma_{ik,j}^{l} - \Gamma_{ij,k}^{l} + \Gamma_{ik}^{p}\Gamma_{pj}^{l} - \Gamma_{ij}^{p}\Gamma_{pk}^{l} = L_{ik}L_j^l - L_{ij}L_k^l$ (가우스 방정식)
8. $L_{ij,k} - L_{ik,j} = \Gamma_{ik}^{l}L_{lj} - \Gamma_{ij}^{l}L_{lk}$ (코다찌 방정식)

중요한 결과들

- 회전면의 기하
- 법선벡터의 (구면)image와 가우스 곡률의 관계
- 극소곡면 : Helicoid, Catenoid,
- 상수평균곡률곡면 : 구면, 주기적인 예(unduloid 등),
- 점근방향, 켤레방향의 기하 (asymptotic, conjugate directions)
- 선직면(ruled surfaces), 가전면developable surfaces
- 배꼽점(umbilic point)

차 례

평행인 벡터장

곡선 $\alpha(t) = \mathbf{x}(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ 를 따라서 정의된 벡터장 $\mathbf{P} = X^i \mathbf{x}_i$ 가 평행이란 $\mathbf{P}'$ 의 접벡터 성분이 0 이라는 뜻이다. 이를 방정식으로 쓰면 다음과 같다 :

$$(X^k)' + \Gamma^k_{ij} X^i (\alpha^j)' = 0 \quad (k = 1, 2).$$

측지선의 방정식

곡선 $\alpha(t) = \mathbf{x}(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ 이 측지선이 될 조건을 방정식으로 쓰면 다음과 같다 :

$$(\alpha^k)'' + \Gamma^k_{ij} (\alpha^i)' (\alpha^j)' = 0 \quad (k = 1, 2).$$

평행인 벡터장

곡선 $\alpha(t) = \mathbf{x}(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$를 따라서 정의된 벡터장 $\mathbf{P} = X^i \mathbf{x}_i$가 평행이란 $\mathbf{P}'$의 접벡터 성분이 0이라는 뜻이다. 이를 방정식으로 쓰면 다음과 같다:

$$(X^k)' + \Gamma^k_{ij} X^i (\alpha^j)' = 0 \quad (k = 1, 2).$$

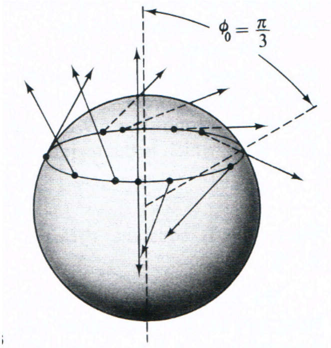
측지선의 방정식

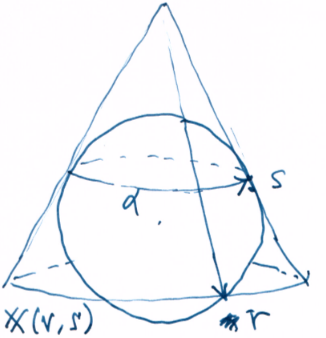
곡선 $\alpha(t) = \mathbf{x}(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$이 측지선이 될 조건을 방정식으로 쓰면 다음과 같다:

$$(\alpha^k)'' + \Gamma^k_{ij} (\alpha^i)' (\alpha^j)' = 0 \quad (k = 1, 2).$$

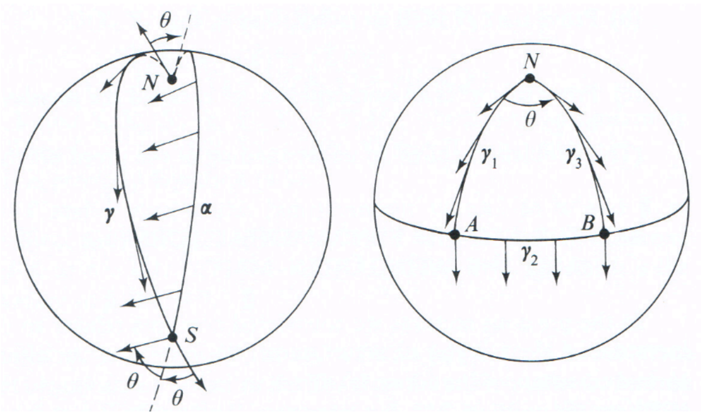
평행 벡터장의 경우

다음 두 곡면의 경우 동일한 평행벡터장을 갖는다.
(Millman, Parker 119쪽)





구면의 평행벡터장과 영역의 넓이



넓이 2θ　　　넓이 θ

차 례

측지좌표계

일반적 측지좌표계 $\mathbf{y}(u^1, u^2)$, 계량 : $\begin{bmatrix} 1 & \\ & \overline{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \overline{h}^2 \end{bmatrix}$

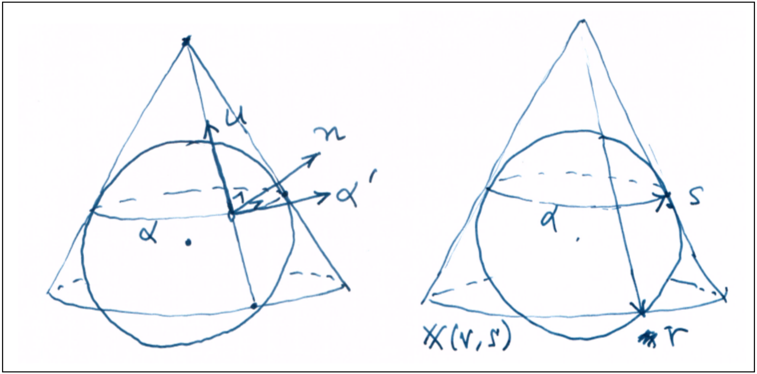
크리스토펠 기호

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\overline{G}_1}{2\overline{G}} = \frac{\overline{h}_1}{\overline{h}},$$
$$\Gamma^1_{22} = -\frac{\overline{G}_1}{2} = -\overline{h}_1\overline{h},$$
$$\Gamma^2_{22} = \frac{\overline{G}_2}{2\overline{G}} = \frac{\overline{h}_2}{\overline{h}}.$$

이 밖의 크리스토펠 기호는 모두 0 값을 갖는다.

차 례

선직면



선직면의 구성

1. 곡선 $\alpha(s)$를 따라서 정의 : $\mathbf{u}(s) = \mathbf{n}(s) \times \alpha'(s)$(Intrinsic Normal).
2. α에서 접하는 선직면 : $\mathbf{x}(r,s) = \alpha(s) - r\mathbf{u}(s)$.
3. $\alpha' = \mathbf{T}, \mathbf{u}, \mathbf{n}$: Darboux Frame.
4. $\kappa_g = \alpha'' \cdot \mathbf{u} = -\alpha' \cdot \mathbf{u}'$
5. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}_2 = \alpha' - r\mathbf{u}'$.
6. $E = 1, \quad F = 0,$
   $G = 1 - 2r\alpha' \cdot \mathbf{u}' + r^2\|\mathbf{u}'\|^2 = 1 + 2r\kappa_g + r^2\|\mathbf{u}'\|^2.$
7. $\alpha'' = \mathbf{T}' = \kappa_g\,\mathbf{u} + \kappa_n\,\mathbf{n}.$

차 례

평행벡터장

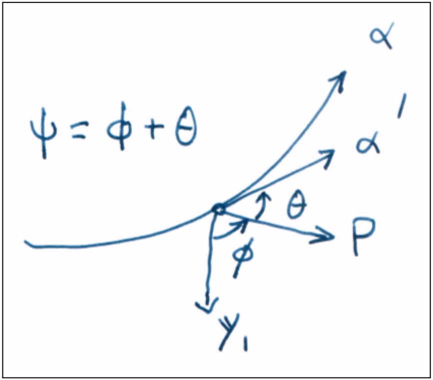
평행인 벡터장

α를 따라 평행인 벡터장 $\mathbf{P} = X^i \mathbf{x}_i = Y^i \mathbf{y}_i$.

1. 선직면의 크리스토펠 기호(α를 따라서):
   $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \kappa_g, \quad \Gamma^1_{22} = -\kappa_g.$
2. ($\mathbf{x}$에 대하여)
   $$(X^1)' + \kappa_g X^2 = 0, \quad (X^2)' - \kappa_g X^1 = 0$$
3. ($\mathbf{y}$에 대하여)
   $$(Y^1)' + \Gamma^1_{22} Y^2 (\alpha^2_{\mathbf{y}})' = 0 \quad 즉, \quad (Y^1)' - \bar{h}_1 \bar{h} Y^2 (\alpha^2_{\mathbf{y}})' = 0$$

벡터장 사이의 각

$\phi = \angle(\mathbf{y}_1, \mathbf{P}), \theta = \angle(\mathbf{P}, \alpha'), \psi = \angle(\mathbf{y}_1, \alpha') = \phi + \theta$



ϕ와 ψ는 제대로 계산할 수 있다. θ는?

벡터장 사이의 각 : θ'

1. $\mathbf{P} = X^1\mathbf{x}_1 + X^2\mathbf{x}_2 = -\sin\theta\mathbf{x}_1 + \cos\theta\mathbf{x}_2.$
2. $X^1 = -\sin\theta$
3. $-\theta'\sin\theta = (X^2)' = \kappa_g X^1 = -\kappa_g\sin\theta$
4. $\theta' = \kappa_g.$

벡터장 사이의 각 : ϕ'

1. $\mathbf{P} = Y^1\mathbf{y}_1 + Y^2\mathbf{y}_2 = \cos\phi\mathbf{y}_1 + \sin\phi J\mathbf{y}_1 = \cos\phi\mathbf{y}_1 + \frac{\sin\phi}{\overline{h}}\mathbf{y}_2.$
2. $Y^1 = \cos\phi,\ Y^2 = (\sin\phi)/\overline{h}.$
3. $-\phi'\sin\phi = (Y^1)' = \overline{h}_1\overline{h}Y^2(\alpha^2_{\mathbf{y}})' = \overline{h}_1\overline{h}\frac{\sin\phi}{\overline{h}}(\alpha^2_{\mathbf{y}})' = \overline{h}_1\sin\phi(\alpha^2_{\mathbf{y}})'$
4. $\phi' = -\overline{h}_1(\alpha^2_{\mathbf{y}})'$

차 례

가우스-보네 1

$$
\begin{aligned}
\int_{\text{경계}} d\phi &= \int_{\text{경계}} \phi' \, ds \\
&= -\int_{\text{경계}} \overline{h}_1 (\alpha_{\mathbf{y}}^2)' ds \\
&= -\int_{\text{경계}} \overline{h}_1 \, du^2 \\
&= -\int_{\text{경계}} \overline{h}_{11} \, du^1 \, du^2 = \iint K \, dA
\end{aligned}
$$

가우스-보네 2

$$\int_{\text{경계}} d\psi + (\text{외각의 합}) = 2\pi$$

가우스-보네 3

$$
\begin{aligned}
2\pi &= \int_{\text{경계}} d\psi + (\text{외각의합}) \\
&= \int_{\text{경계}} d\phi + \int_{\text{경계}} d\theta + (\text{외각의합}) \\
&= \iint K\, dA + \int_{\text{경계}} \kappa_g\, ds + (\text{외각의합})
\end{aligned}
$$

가우스-보네 4

$$\begin{aligned}\iint K\,dA &= \sum_i \iint_{\triangle_i} K\,dA \\ &= \sum (2\pi - \sum_{\triangle_i} [\text{외각}]) \\ &= \sum (2\pi - \sum_{\triangle_i} [\pi - \text{내각}]) \\ &= \sum_i 2\pi - \sum_{i,\triangle_i} \pi + \sum_{i,\triangle_i} [\text{내각}] \\ &= 2\pi(f - e + v) = 2\pi\chi.\end{aligned}$$

(측지삼각형을 사용함.)