Naive Set Theory

Paul R. Halmos 著
고려대학교 이과대학 수학과
2009 집합론 수강생 譯
2009 수리과학의 의사소통법 수강생 typeset
version 0.5
(7, 10, 14 절은 예전 번역 그대로입니다.)

2009 년 6 월 7 일

차 례

1 외연 공리

늑대 한 무리, 포도 한 다발, 비둘기 한 떼는 모두 어떤 것들의 집합에 대한 예이다. 집합의 수학적 개념은 모든 알려진 수학을 위한 기초로 사용될 수 있다. 이 작은 책의 목적은 집합의 기본적은인 성질을 밝히는 것이다. 부수적으로, 용어의 단조로움을 피하기 위해, 우리는 가끔 집합 (set) 이라는 말 대신 모임 (collection) 이라는 말을 쓸 것이다. 물론, 부류 (class) 라는 말도 이 책에서 사용되지만 그렇게 하는 것에는 다소 위험이 있다. 집합론에 어떤 접근에서 부류 (class) 는 특별한 기술적 의미를 가지고 있는 것으로 보기 때문이다. 우리는 조금 후에 다시 이 점을 언급하게 될 것이다.

밝히지 않을 한 가지는 집합에 관한 정의이다. 이 상황은 우리가 초등기하에 대한 공리적 접근에 익숙한 것과 유사하다. 그 접근은 점과 직선에 대한 정의를 제공하지 않는다. 대신 그것들로 할 수 있는 것이 무엇인지를 보여준다. 여기서 채택하고 있는 준 공리적인 시각은 독자들이 집합이 무엇인지에 대해 보통의 직관적인 이해를 하고 있다고 가정한다. 설명의 목적은 옳다고 보일 수 있는 많은 것들 중 몇몇을 기술하는 데 있다.

집합은 보통 생각되는 것처럼 원소 (elements) 또는 요소 (members) 를 가지고 있다. 어떤 집합의 원소는 늑대 한 마리, 포도 한 송이, 또는 비둘기 한 마리가 될 수 있다. 이때, 어떤 집합이 그 자체로 다른 집합의 원소가 될 수 있다는 것을 아는 게 중요하다. 수학은 집합의 집합에 대한 예로 가득 차 있다. 예를 들어, 한 직선은 점들의 집합이다; 평면의 모든 직선의 집합은 (점들의) 집합의 집합에 대한 당연한 예이다. 놀라운 점은 집합이 원소로 나타나기보다는 수학적 목적상 다른 원소들은 고려하지 않아도 된다는 것이다. 이 책에서 우리는 특별히 집합과 집합으로 이뤄진 집합들, 그리고 깜짝놀랄만한 높이와 복잡성을 지닌 유사한 탑들에 대해서 배울 것이다.

예를 드는 방법으로 우리는 때때로 양배추, 또는 왕 등의 집합들을 말할 것이다. 하지만 이러한 방법은 항상 비유하여 설명할 때만 사용해야 하고, 설명해야할 이론의 부분으로서는 사용해서는 안 된다.

집합론의 주요한 개념으로, 완전히 공리적 연구에 있는 하나는 정의되지 않은 중요한 개념인 belonging 이다. 만약 x 가 A 에 속한다면 (x 는 A 의 원소이다, x 는 A 에 포함된다), 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x \in A.$$

그리스 문자 엡실론의 이 version 은 포함관계를 나타내는데 너무 많이 쓰여 그 외의 것을 나타내는데 쓰이는 것이 거의 금지되어있다. 많은 저자들이 ϵ 을 영원히 집합론적 용법에 속하는 것으로 보고, 그리스 알파벳의 다섯 번째 문자가 필요할

때는 ε 을 썼다.

집합론에서의 알파벳 에티켓에 대한 간략한 여담은 아마 유용할 것이다. 앞의 문단에서처럼 소문자와 대문자를 쓰는 것에 대한 강압적인 근거는 없다; 우리는 $x \in y$, 또는 $A \in B$ 와 같이 써왔고 앞으로도 종종 쓸 것이다. 그러나 가능하면 우리는 비공식적으로 집합의 크기에 대해 특별한 분류체계로 언급할 것이다. 그 체계는 원소를 나타낸 알파벳의 처음에 오는 문자와 마지막에 오는 문자로 그 원소들을 포함하는 집합을 나타내기로 한 약속 하에 성립된다; 유사하게 비교적 간단한 문자들로 원소들을 표현하기도 하고 더 크고 화려한 글씨체로 그것들을 포함하는 집합을 나타낸다. 예를 들면 다음과 같다. $x \in A$, $A \in X$, $X \in \mathcal{C}$.

belonging 보다 기본적인 집합사이에 가능한 더 기초적인 관계는 상등이다. 두 집합 A, B 의 상등은 다음의 익숙한 기호로 널리 표현되고 있다.

$$A = B;$$

A, B 두 집합이 같지 않다는 사실은 다음과 같이 기술된다.

$$A \neq B$$

원소의 가장 기본적인 특징은 이것이 두 집합의 상등과 연관성이 있다는 것이다. 이것은 다음과 같이 공식화 된다.

공리 [외연공리] 두 집합이 상등한다는 것과 두 집합이 같은 원소를 갖고 있다는 것은 필요충분 조건이다.

약간의 과장과 다소 불명확함: 집합은 그것의 외연으로 결정된다.

외연 공리가 단순히 두 집합이 동등하다는 것의 논리적으로 필요한 특징뿐만 아니라 belonging 에 대한 non-trivial 한 진술이라는 점을 이해하는 것은 매우 중요하다. 이 점을 이해하는 한 가지 방법은 부분적으로 유사한 상황을 고려하는 것이다. 여기서 외연공리와 유사한 것은 성립하지 않는다. 예를 들어, 집합 대신 사람을 고려해보자. 만약 x 와 A 가 사람이라면, 우리는 x 가 A 의 조상일 때, $x \in A$ 와 같이 쓸 수 있다.(사람의 조상은 그 사람의 부모, 그 사람의 부모의 부모, 등등이다.) 이 외연 공리와 유사한 것에서는 두 사람이 같다면, 그들은 같은 조상을 가지고 있다고 말할 수 있다.(이것은 필요조건이고, 사실이다.) 또한 같은 조상을 갖고 있다면, 그들은 같다고 말할 수 있다. (이것은 충분조건이고, 거짓이다.)

만약 A 와 B 가 집합이고, A 의 모든 원소가 B 의 원소라면 우리는 A 를 B 의 부분집합 (subset) 이라 하고, B 가 A 를 includes 한다고 한다. 이를 우리는 다음과 같이 표기한다.

$$A \subset B$$

또는

$$B \supset A.$$

그 정의의 의미는 각 집합이 자기 자신에게 포함딘다고 간주해야 한다는 것을 암시한다. ($A \subset A$); 이 사실은 set inclusion 이 반사적 (reflexive) 이라는 것으로 설명된다.(단어의 의미상, 상등은 또한 반사적이라는 것을 주목해라) 만약 A, B 두 집합이 $A \subset B$ 와 $A \neq B$ 를 만족한다면, 진 (proper) 이라는 단어가 사용된다. (진 부분집합, proper inclusino) 만약 A, B, C 집합 사이의 관계가 $A \subset B$ 이고, $B \subset C$ 이면, $A \subset C$ 이다 ; 이 사실은 set inclusion 이 이행적 (transitive) 이라는 것으로 표현된다. (이 특징은 상등관계에서도 공유된다.)

만약 A, B 두 집합이 $A \subset B$, $B \subset A$ 를 만족한다면, A 와 B 는 같은 원소를 가지고 있으므로 외연공리에 의해서 $A = B$ 이다. 이 사실은 set inclusion 이 비대칭적 (antisymmetric) 이라는 것으로 표현된다. (여기서 set inclusion 이 상등과는 다르게 행동한다. 만약 $A = B$ 이면, 필연적으로 $B = A$ 라는 점에서 상등은 대칭적이다.) 사실 외연 공리는 다음과 같이 재공식화 될 수 있다: 만약 A 와 B 가 집합이라면, $A = B$ 라는 것의 필요충분 조건은 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 를 모두 만족하는 것이다. 이와 같이, 두 집합 사이의 상등에 관한 거의 모든 증명은 두 부분으로 나누어진다. ; 처음은 $A \subset B$ 를 보이는 것이고, 다음은 $B \subset A$ 를 보이는 것이다.

belonging($\in$) 과 inclusion($\subset$) 이 개념적으로 아주 다르다는 것을 살펴보았다. 한가지 중요한 차이점은 이미 위에서 나타내었다.: inclusion 은 항상 반사적 (reflexive) 이지만, belonging 이 반사적인지는 불분명하다. 즉: $A \subset A$ 는 항상 참이다; $A \in A$ 는 항상 참인가? 우리가 보았던 어떤 합리적인 집합에서도 이것은 확실히 참이 아니다. 동일선상에서 inclusion 은 이행적 (transitive) 이지만, belonging 은 이행적이지 않다. 예를 들어, 실생활에서 조직들을 원소로 가지고 있는 초 조직은 쉽게 독자의 관심을 일으킬 것이다.

2 분류 공리

집합론의 가장 기본적인 규칙 (확장공리 제외) 은 기존의 집합에서 새로운 집합을 만들어 내기 위해 고안된다. 집합을 만드는 이 기본적인 원리들 중 첫번째면서 가장 중요한 것은, 대략적으로 말하면, 어떤 집합의 원소들로 부분집합을 만들 수 있다는 것이다. 다시 말해서 원소들의 부분집합은 명제가 참인 원소들로 이루어진다.

엄밀히, 이 규칙들을 정확한 용어들로 규정하기 전에, 이해를 도울 수 있는 예를 살펴보자. A를 모든 남자의 집합이라 하자. 명제 "x는 기혼이다" 는 A에 속한 어떤 원소 x에 대해서는 참이고, 나머지 원소에 대해서는 거짓이다. 우리가 설명하고 있는 규칙은 주어진 집합 A에서부터 주어진 명제에 의해 구성된 부분집합 (즉, 모든 기혼 남성의 집합) 으로의 이행을 정당화한다. 그 부분집합의 생성을 표현하기 위해, 그것은 보통

$$\{x \in A : x\text{는 기혼이다}\}$$

로 표시된다. 마찬가지로,

$$\{x \in A : x\text{는 미혼이다}\}$$

는 모든 독신남의 집합이다;

$$\{x \in A : x\text{의 아버지는 아담이다}\}$$

는 카인과 아벨만을 포함하는 집합이다; 그리고

$$\{x \in A : x\text{는 아벨의 아버지이다}\}$$

는 아담만을 포함하는 집합이다. 주의: 모자만 들어있는 상자는 모자와 같지 않다. 유사하 게, 위의 예에서 마지막으로 제시한 집합을 아담과 혼동해서는 안된다. 집합과 상자사이의 유추는 많은 약점이 있지만, 때때로 사실에 관해 유익한 묘사를 해준다.

위의 예들의 기본이 되는 정확하고 일반화된 규칙이 되기 위해서는 "sentence" 의 정의가 결여되어 있다. 여기 간단하고 비공식적인 정의가 있다. 다시 말하면 두 개의 기본적인 유형의 명제이 있다. 우선, 포함에 관한 명제,

$$x \in A,$$

그리고 상등에 관한 명제,

$$A = B;$$

모든 다른 명제는 이와 같은 공리적인 명제들로부터 최소한의 적절한 문법과 명료함을 제약하면서 보통의 논리적 연산의 반복된 적용에 의해 얻어진다. 더 분명히

정의하기 위해 "보통의 논리적 연산" 과 체계에 관한 규칙의 목록을 덧붙일 필요가 있다. 이전의 적절한 (사실상, 과다한) 목록은 7 가지 항목을 포함한다:

and,

or, (다음과 같은 의미에서 "either — or — or both")

not(부정,not)

if—then—, (or implies)

if and only if,

for some,(or there exist)

for all.

문장 구성의 규칙으로서 다음과 같이 쓰인다. (ⅰ) "not" 은 문장의 앞에 쓰고 그 결과는 괄호 안에 쓴다. (괄호를 쓰는 이유는 명료함을 부각시키기 위함이다. 또한 괄호를 사용하므로써 구두점은 사용할 필요가 없다. 명제의 정의에 사용되는 완결의 삽입어구도 거의 필요하지 않다. 우리는 괄호를 생략해도 혼란이 되지 않을 정도로 괄호를 생략할 것이다. 보통의 수학적인 관례에서 (이책에도 따르는) 크기와 모양이 다른 괄호를 사용하는데 이것은 시각적인 편의를 위해서이다.) (ⅱ)"and" 와 "or" , "if and only if" 은 두 문장 사이에 쓰고 그 결과들은 괄호 안에 쓴다. (ⅲ) "if—then—" 에서 -대신 문자를 쓰고 그 결과는 괄호 안에 쓴다. (ⅳ) "for some—", "for all—" 에서 -대신 문자를 쓰고 뒤이어 결과를 쓰고 전체를 괄호안에 넣는다. (만약 문자가 조건에서 쓰이지 않았다고 해도 상관없다. 보통의 자연스러운 관례에 따라 "for some y ($x \in A$)" 는 단지 $x \in A$ 만을 의미한다. 그것은 "for some—" 또는 "for all—" 과 문자가 쓰여졌다고 할지라도 같은 의미가 된다.

"for some x" ($x \in A$) 는 "for some y" ($y \in A$) 과 같다는 사실을 기억하라; 표기상의 적절한 변화는 철자간의 충돌을 항상 막아 줄 것이다.)

이제 우리는 종종 독어로 *Aussonderunysaxiom* 로 정의되는 집합론의 주요 규칙을 명확히 할 준비가 되었다.

공리 [분류공리] 모든 집합 A 와 모든 명제 $S(x)$ 에 대해 어떤 집합 B 가 대응한다. 그 집합 B 의 원소는 명제 $S(x)$ 를 만족시키는 집합 A 의 원소 x 와 정확히 일치한다

여기서 "명제" 은 단순한 문장이다. 그 기호는 문자 x 가 그 명제 $S(x)$ 에서 자유롭다는 사실을 나타내기 위해 의도로 사용되었다; 그것은 x 가 "for some x" 나 "for all x" 라는 말이 필요 없이 적어도 한번은 $S(x)$ 로 나타낼 수 있다는 것을 의미한다. 분류공리가 집합 B 를 유일하게 결정한다는 것은 확장 공리의 즉각적인 결과이다. B 가 A 와 $S(x)$ 에 의해 나타나는 방식을 표시하기 위해 다음과 같이 쓰는 것이 일반적이다.

$$B = \{x \in A : S(x)\}.$$

분류공리의 적합한 적용을 얻기 위해, $S(x)$ 의 역할을 하는 문장

$$\text{not}(x \in x)$$

를 고려해보자. “$x \in' A$(대신에 ″$x \notin A$″) 대신에 ”not($x \in A$)” 로 적는 것이 편리할 것이다; 이 표기에 따르면 $S(x)$ 의 역할은 바로 다음과 같다.

$$x \in' x.$$

이는 집합 A가 무엇이든지, 만약 $B = \{x \in A : x \in' x\}$ 이면, 모든 y에 대해,

$$(*) \qquad y \in B \text{ if and only if } (y \in A \wedge y \in' y)$$

$B \in A$ 가 가능한가? 우리는 계속해서 그럴 수 없다는 것을 증명해나갈 수 있다. 게다가 만약 $B \in A$라면, $B \in B$(그럴듯하지 않지만, 분명 불가능하지는 않다.) 혹은 $B \in' B$ 중 하나일 것이다. 만약 $B \in B$라면, 다시 $(*)$ 에 의해, 가정 $B \in A$는 $B \in' B$를 산출한다-모순 만약, $B \in' B$라면, 다시 $(*)$ 에 의해, 가정 $B \in A$는 $B \in B$를 산출한다-또한 모순. $B \in A$가 불가능하 다는 것이 증명되었으므로 우리는 $B \in' A$라는 사실을 알 수 있다. 이 결론의 가장 흥미로운 부분은 A에 속하지 않는 무엇인가가 (다시말해서 B) 가 존재한다는 사실이다. 이 주장에서 집합 A는 매우 임의적이었다. 달리 말해서, 우리는 다음을 증명했다.

무 *(無)* 가 전체를 포함한다,

혹은, 더 극적으로,

전체가 없다.

여기서 “전체” 는 어떤 특별한 토의에서, 그 토의에 들어있는 모든 대상들을 포함하는 집합인 “담론의 전체” 라는 의미로 사용되었다.

집합론에 대한 (공리 이전의) 오래된 접근에서, 전체의 존재는 당연시 되었고, 앞 단락의 주장은 러셀의 역설 로 알려져 있었다. 그 교훈은, 특히 수학에서, 무 (無)를 위해 무엇인가를 갖는 것이 불가능하다는 것이다. 어떤 집합을 구체화하기 위해, 어떠한 말 (”$x \in' x$” 같은 명제를 만들지 모르는) 을 선언하는 것은 충분치 않다; 어떠한 말이 항상 적용될 수 있는 원소의 집합을 갖는 것 또한 필요하다.

3 정리되지 않은 쌍들

지금까지 언급한 모든 것들에 한해서, 우리는 허공 안에서 작업했을지도 모른다. 본질에 대한 토론을 주기 위하여, 지금 공식적으로 "집합이 존재한다." 라고 가정해보자. 나중에 우리는 더 깊고, 더 유용한 실체론상의 가정을 공식화 할 것이기 때문에, 이 가정은 오직 일시적인 역할만 할 뿐이다. 재미없어 보이는 가정의 한 결과는 원소가 없음에도 집합이 존재한다는 것이다. 정말로, 만약에 A가 집합이라면, 상술의 공리를 "$x \neq x$" 라는 문장과 함께 A에 적용시켜라.(또는, 실제로는, 어떤 다른 보편적인 거짓 문장과 함께) 그 결과는 집합 $\{x \in A : x \neq x\}$ 이고 그 집합은 분명하게 원소를 가지고 있지 않다. 외연의 공리는 원소를 가지지 않는 집합은 오직 한 집합 밖에 없음을 나타낸다. 그 집합을 위해서 흔히 쓰는 부호는 ϕ이다; 그 집합은 공집합 (empty set) 이라고 불린다. 공집합은 모든 집합의 부분집합이며, 또는, 다른 말로는, 모든 A에 대해 $\phi \subset A$라고 한다. 이것을 입증하기 위해서, 우리는 다음과 같이 주장할 것이다. 공집합 안의 모든 집합은 A에 속한다 라는 문장은 증명되었다; ϕ안에 어느 원소도 없으므로, 그 조건은 자동적으로 만족한다. 그 추론은 옳지만, 그러나 아마도 만족스럽지 않을 것이다. 그것은 흔히 있는 현상 (공허한 느낌 안에 있는 조건) 의 전형적인 예이므로, 미숙한 독자에게 하는 충고의 말은 질서있게 있어야 한다. 공집합에 관해서 무엇이 진실인지를 증명하기 위해서는, 그것이 거짓이 될 수 가 없다는 것을 증명하여라. 예를 들어, 어떻게 해야 $\phi \subset A$가 거짓일 수 있겠는가? 그것은 오직 A에 속하지 않는 원소를 공집합이 가지고 있을 때만 거짓이 될 수 있다. ϕ는 원소를 가지고 있지 않으므로, 이것은 모순이다. 결론은 $\phi \subset A$ 는 거짓이 아니고, 그러므로 모든 A에 대해서 $\phi \subset A$ 이다. 지금까지 발전된 집합 이론은 아직도 어지간히 거짓된 것이 있다; 아마도 오직 한 개의 집합만 있고 그 한 개는 비어있을 지도 모른다. 모든 집합이 어떤 집합의 원소라는 것을 확실하게 하기 위한 충분한 집합이 존재할까? 어느 두개의 집합들에 있어서 둘 다 속하게 되는 세번째 집합이 있다는 것이 사실일까? 3 개의 집합들, 또는 4 개, 또는 몇 개의 집합들에 관해서는 어떨까? 우리는 이러한 질문들을 해결하기 위해서 집합 구성에 대해서 새로운 원리가 필요하다. 다음의 원리가 좋은 시작이다.

공리 [짝짓기 공리] 어느 두개의 집합들에 있어서, 그들이 다 속하게 되는 집합이 존재한다.

이것은 단지 위의 2 번째 질문에 관한 확정적인 대답이라는 것을 주의하자. 걱정하는 사람들을 안심시키기 위해, 급히 위에서 사용된 "2", "3", "4" 와 같은 단어들이 그것들의 이름들을 제시하는 수학적인 개념을 해석되지 않았는가, 그리고 그것들이 후에 정의되어질 것인가를 관찰해보자; 현재 그 단어들은 단지 "어떤 것 그리고 그밖에 어떤 것" 과 같이 적절히 반복되어진 경우에서 통상적인 어학상의 생략일 뿐이다. 그러므로, 예를 들어, 생략하지 않은 형태로 짝짓기 공리는 만약

a와 b가 집합들이라면 $a \in A$ 그리고 $b \in A$인 집합 A가 존재함을 말해준다. 짝짓기 공리의 한 결론(사실상 동치의 공식화)은 어느 두개의 집합들에 대해서 그들을 다 포함하고 그밖에 아무것도 포함하지 않는 집합이 존재하고 있다는 것이다. 정말로, 만약 a와 b가 집합들이라면, 그리고 만약 A가 $a \in A$ 그리고 $b \in A$인 집합이라면, 우리는 상술 공리를 "$x = a$ 또는 $x = b$"의 문장과 함께 A에 적용시킬 수 있다. 그 결과는 집합 $\{x \in A : x = a$ 또는 $x = b\}$이다. 그리고 분명하게 그 집합은 단지 a와 b를 포함한다. 확장 공리는 이 성질을 가지고 있는 집합이 유일하게 한 개가 있음을 내포한다. 그 집합을 위해서 흔히 쓰는 기호는 {a,b}이다; 그 집합은 a와 b로 생성된 쌍이라고 부른다.(또는 바로 다음의 개념인 무질서한 쌍과의 명확한 비교에 의해서) 일시적으로 만약 우리가 "$x = a$또는 $x = b$"를 $S(x)$로 해석한다면, 우리는 $(*)$ "$x \in B \Leftrightarrow S(x)$"라는 조건을 가진 집합 B가 존재한다고 말을 함으로써 짝짓기 공리를 표현할 수 있다. 집합 A에 적용된 상술 공리는 $(**)$"$x \in B \Leftrightarrow (x \in A$ 그리고 $S(x))$"의 조건을 가진 집합 B의 존재를 주장한다. $(*)$와 $(**)$ 사이의 관계는 상당히 자주 일어나는 무언가의 특징을 나타낸다. 집합 구성에 관해 남아 있는 모든 원리는 상술공리의 특별한 (pseudo-special) 경우이다. 즉, $(*)$는 $(**)$의 가짜로 특별한 경우(pseudo-special)이다. 그들 모두는 어떤 조건에 의해 명명된 집합의 존재성을 주장한다. 만약 모두 명명된 원소로 이루어진 집합이 존재한다면, 그것을 포함하는 집합의 존재성은 상술공리의 특별한 경우에 수반된다.

만약 a가 집합이라면, 우리는 정리되지않은 쌍 $\{a, a\}$를 만들 수 있다. 그 정리되지않은 쌍을 $\{a\}$로 나타내고, a의 singleton이라고 부른다. 이것은 a를 단 하나의 원소로 가진다는 특징을 나타낸다. 예를 들어, ϕ과 $\{\phi\}$은 완전히 다른 집합이다. 앞의 것은 원소를 가지지 않는 반면, 뒤의 것은 유일한 원소 ϕ만 가진다. 다시 말해, $a \in A$는 $\{a\} \subset \mathbf{A}$와 같은 말이다.

짝짓기 공리에 의해 모든 집합은 어떤 집합의 원소라는 것과 어떤 두 개의 집합은 어떤 것의 원소임과 동시에 같은 집합이라는 것은 증명된다. (세 개, 네 개 그 이상의 집합에 대한 것은 다음에 답하기로 한다.) 지금까지 우리가 만들어온 가정과 관련된 다른 설명은 아주 많은 집합의 존재성을 말할 수 있다는 것이다. 예를 들어 $\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}$과 같은 것들 또 이들 중 어떤 두 개로 이루어진 쌍, 예를 들어 $\{\phi, \{\phi\}\}$과 같은 것들 또, 이런 쌍으로 이루어진 쌍, 또 singletone과 쌍으로 이루어진 쌍, 그리고 이런 과정으로 만들어 지는 모든 것들을 생각해 보자.

[연습문제] 이런 방식으로 만들어진 모든 집합들은 서로 다른 집합인가?

집합론의 논의를 이어나가기 전에 기호의 문제를 정리하고 넘어가자. $(*)$안의 $\{x : S(x)\}$로 집합 B를 설명하는 것은 자연스러워 보인다. 특별한 경우로 다음의

것도 생각할 수 있다.

$$\{x : x = a \quad or \quad x = b\} = \{a, b\}$$

우리는 이것이 편리하고 사용하기에 지장이 없을 때 이론 기호를 사용 할 것이다. 즉, 만약 x 의 조건 $S(x)$ 가 집합의 구성을 기술했다면, 우리는 그 집합을 $\{x : S(x)\}$ 와 같이 나타낼 수 있다. 만약 A 가 집합이고 $S(x)$ 가 $(x \in \mathbf{A})$ 라면, $\{x : S(x)\}$ 를 구성하는 것은 아무런 문제가 없다. 즉,

$$\{x : x \in A\} = A.$$

만약 A 는 집합이고 $S(x)$ 는 임의의 문장이라면, $\{x : x \in A \quad and \quad S(x)\}$ 를 구성하는 것은 문제없다. 이 집합은 $\{x \in A : S(x)\}$ 와 같다. 더 나아가서, 우리는 다음과 같이 나타낸다.

$$\{x : x \neq x\} = \phi$$

그리고

$$\{x : x = a\} = \{a\}$$

$S(x)$ 가 $(x \in x)$ 또는 $(x = x)$ 라면 기술된 x 들은 집합이 구성요소가 아니다. 무로부터 유를 창조할 수 없다 하더라도, 이런 말은 귀에 거슬릴지 모르지만 어떤 집합은 집합이 아니고, 그들의 이름은 절대로 불리어질 수 없다. 집합론의 몇 몇 접근은 이런 불법적인 집합의 규칙적인 사용을 통해 이런 바람을 약화시키려고 노력했다. 즉, 집합이라는 단어를 사용하지 않고 CLASS 라는 단어로 대신 사용했다. CLASS 란 무엇일까 그리고 그들은 어떻게 사용 될까의 자세한 설명은 오늘날의 접근에서는 적절하지 않다. 대충 이야기 하면, CLASS 는 조건 혹은 조건의 확장으로 정의될 수 있다.

4 합집합과 교집합

만약 A 와 B 가 집합이라면, 두 집합의 원소들을 모두 포함하는 하나의 집항을 생각해 볼 수 있다. 그런 포괄적인 집합을 기술할 한 가지 방법은 $\{A, B\}$ 쌍의 일원 중에 적어도 하나에 속하는 모든 원소들을 포합하는 집합을 생각하는 것이다. 이 설명을 통해 완전히 일반화할 수 있다. ; 같은 원리는 단순히 두 개의 집합 뿐만 아니라 집합들의 임의의 모임에도 확실하게 적용되어야 한다. 다시 말해서, 원해지는 것은 집합구조의 다음의 원칙이다.

공리 [결합의 공리] 집합들의 모든 모임에 대하여, 주어진 모임 중에서 적어도 하나의 집합에 속하는 모든 원소를 포함하는 집합이 존재한다.

다시 쓰면: 모든 모임 $\mathcal{C}$ 에 대하여, $\mathcal{C}$ 의 어떤X 에 대해 $x \in X$ 라면, $x \in U$ 인 집합U 가 존재한다. ("적어도하나" 는 "어떤" 과 같다는 것을 유의해라.) 위에서 기술된 포괄적인 집합U 는 매우 포괄적일수도 있다 ; 모임 $\mathcal{C}$ 의 집합들 X 중 어떤 것에도 속하지 않는 원소도 포함할 수 있다. 이것은 개선하기 쉽다 ; 단지 집합$\{\}$ 을 형성하기 위한 상술의 공리를 적용한다.

$$\{\, x \in U : \mathcal{C} \text{ 안의 어떤 } x \text{ 에 대하여 } x \in X \,\}$$

(여기서 조건은 수학적으로 잘 받아들여지는 "어떤 X 에 대해서 ($x \in X$ 이고 $X \in \mathcal{C}$)" 의 관용적인 사용의 변형이다.) 모든 x 에 대해서, 이 집합에 속하는 x 는 $\mathcal{C}$ 안의 어떤 x 에 대해 X 에 속하는 X 다라는 것이 필요충분조건이 된다. 표기법을 바꾸고 다시 새로운 집합을 U 라 부르면,

$$U = \{x : \mathcal{C} \text{ 안의 어떤 } x \text{ 에 대하여 } x \in X\}$$

이 집합 U 는 집합의 모임 $\mathcal{C}$ 의 결합이라고 부른다 ; 확장된 공리는 그것의 유일함을 보증한다는 것을 유의해라. U 에 대한 적어도 일반적으로 쓰이는 가장 간단한 기호는 수학적 순환에서 매우 대중적이지 않다 ; 그것은

$$\{x \in U : \mathcal{C} \text{ 안의 어떤 } x \text{ 에 대하여 } x \in X\}$$

$$\bigcup \mathcal{C}$$

이다. 대부분의 수학자가

$$\bigcup \{X : X \in \mathcal{C}\}$$

또는

$$\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$$

같은 것을 선호한다. 그 이상의 대안은 어떤 중요하고 특별한 경우에 가능하다; 그것들은 적당한 때에 기술될 것이다. 당분간 우리는 결합이론의 공부를 오직 가장

간단한 사실로 제한한다. 모든 것 중에 가장 간단한 사실은

$$\bigcup\{X : X \in \phi\} = \phi$$

이고, 다음으로 가장 간단한 사실은

$$\bigcup\{X : X \in \{A\}\} = A$$

이다. 위에 언급된 사실들은 적나라하게 간단한 표기법으로

$$\bigcup \phi = \phi$$

과

$$\bigcup\{A\} = A$$

로 표현된다.
증명은 정의로부터 즉시 나온다.
집합 쌍 (어쨌든 이 모든 논의를 시작하게 한) 의 결합에서 약간 더 내용이 있다. 그러한 경우에 특별한 표기법이 사용된다 :

$$\bigcup\{X : X \in \{A,\ B\}\} = A \cup B$$

결합의 일반적인 정의는 특별한 경우에 $x \in A \cup B$ 이면 x 는 A 또는 B 둘 중 하나에 속한다는 것을 의미한다 ;

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{또는} \, x \in B\}$$

가 된다. 여기에 쌍의 결합에 대한 쉽게 증명된 사실들이 몇 개 있다 :

$$A \cup \phi = A\,,$$
$$A \cup B = B \cup A \text{ (가환)},$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\text{(결합)},$$
$$A \cup A = A \text{ (멱등원)},$$
$$A \subset B \text{ 이면 } A \cup B = B \text{ 이고, } A \cup B = B \text{ 이면 } A \subset B \text{ 이다.}$$

수학을 하는 모든 학생들은 일생에서 적어도 한 번은 스스로 이것들을 증명해야 한다. 이 증명은 논리적 연산자 또는 의 일치하는 원소의 특성에 근거한다.

그러나 정확하게 암시하는 간단한 사실은 다음과 같다.

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$$

이것이 일반적인 쌍을 정의하는 방법을 제안하는 것이다. 특히 우리는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\{a, b, c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$$

같은 방법으로 수식 왼쪽을 정의 할 수 있다. 결합 법칙을 고려하면 당연히 수식 오른쪽은 적어도 해당 집합에 속하는 한쌍을 가지고 있다는 것을 이해할 수 있다.

$$\{a, b, c\} = \{x : x = a \text{ 나 } x = b \text{ 나 } x = c\}$$

위와 같은 것을 쉽게 증명할 수 있기 때문에 우리는 모든 세개의 집합에 대해서 어떤 원소가 들어가는 집합과 공집합이 존재한다는 것을 알 수 있다. 이것으로 이루어진 유일하게 정의된 집합을 3중 (triple) 이라고 부르는 것은 자연스러운 일이다. 이런 기수법과 용어법의 존재는 더 많은 항 (4중 : quadruples 등) 들을 소개해준다.
합집합의 구성은 다른 이론적인 집합 연산에 대한 많은 유사점 (point) 을 갖고 있다. 만약에 A 와 B 가 집합이라면 A 과 B 교집합은 다음과 같다.

$$A \cap B$$

이것은 다음과 같이 정의한다.

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$$

비록 이것이 다르게 보이더라도 이 정의는 A 와 B 의 대칭 (symmetric) 군이다. '$x \in A \cap B$ 는 x 가 집합 A, B 에 속해있다의 필요충족조건' 이기 때문에 $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$ 는

$$A \cap B = \{x \in A \text{ 이고 } x \in B\} \text{ 이다.}$$

교집합에 대한 기본적인 사실뿐만 아니라 교집합의 증명은 합집합에 대한 기본적인 사실, 증명과 유사하다.

$$A \cap \phi = \phi$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

교집합이 공집합인 집합의 쌍을 특별한 단어로 이용하는 것이 정당화할 수 있게 꽤 자주 생긴다. 만약$A \cap B = \phi$ 라면 집합 A, B 를 공통 원소를 갖지 않는다 (disjoint)

로 부른다. 공통 원소를 가지지 않는 두 별개의 집합의 집단 (collection) 을 때때로 같은 말로 말할 수 있다. 우리는 그런 공통원소가 없는 쌍 (pariwise disjoint) 가 모인 경우에 둘 중에 하나 선택해서 말할 것이다. 합집합과 교집합의 성질을 이용하여 다음 사실을 알 수 있다.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

이 등호관계를 분배법칙 (distributive laws) 이라고 말한다. 집합론의 증명 모형을 인용한 방법으로 우리는 두번째를 증명한다. 만약에 x가 왼쪽 식에 포함된다면 x는 집합 A 에 포함되거나 집합 B와 C 둘 다 포함이 된다. 만약에 x가 A 에 포함한다면 x는 $A \cap C$ 와 $A \cap B$ 둘 다 포함된다. 만약에 x가 B와 C 둘 다 포함된다면 x는 $A \cap C$ 와 $A \cap B$ 둘 다 포함된다. 이것에 따르면 어떤 경우이던지 x는 식 오른쪽에 포함된다. 이것은 식 오른쪽이 식 왼쪽부분은 포함하고 있다고 증명한다. 역으로 포한된다는 증명을 위해, 단지 x가 $A \cap C$ 와 $A \cap B$ 에 포함한다면 x는 집합 A 혹은 B와 C 둘 다 포함이 된다면 증명이 된다. 이 두 집합 A와 B 의 교집합의 구성은 또는 우리가 마찬가지로 말할 수 있는 집합 $\{A, B\}$ 의 쌍의 교집합의 구성은 더많은 경우의 일반적인 연산의 특별한 경우이다. (이것은 다른 합집합을 모방한 교집합의 이론의 관계이다.)

교집합의 일반적인 연산의 존재는 각각 공통 원소를 가지고 있는 집합의 집단에 대해 주어진 집단들의 모든 집합에 속해있는 원소가 꼭 들어있는 집단이 존재한다는 사실에 의존한다. 다른말로 ϕ 을 제외한 각각의 집단 $\mathcal{C}$ 에 대해서 $x \in V$ 는 $\mathcal{C}$ 에 속하는 모든 x에 대해서$x \in X$ 하기 위한 필요충분조건인 V 가 존재한다는 것이다. 이 주장의 증명을 위해 $\mathcal{C}$ 에 속하는 어떤 부분집합인 A를 잡고 (이 과정은 $\mathcal{C} \neq \phi$ 인 사실을 보면 정당하다.) 아래와 같이 쓴다.

$$V = \{x \in A : \mathcal{C} \text{ 에 속하는 모든 } X \text{ 에 대해 } x \in X\ \}.$$

(이 조건은 모든 X 에 대해서 (만약 $X \in \mathcal{C}$ 이면 $x \in X$ 이다) 란 의미이다.) 임의로 선택한 A와 위의 V는 사실상 아무런 상관이 없다.(illosory) 사실상은 다음과 같다.

$$V = \{x : \mathcal{C} \text{ 에 속하는 모든 } X \text{ 에 대해 } x \in X\}.$$

집합 V 는 집합들을 데 없는 대신에 잘쓰이지 않는

$$\bigcap \mathcal{C},$$

집합 V 는 주로 다음과 같이 표시한다.

$$\bigcap\{X : X \in \mathcal{C}\}$$

또는

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X$$

예제. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ 이면 $C \subset A$ 은 필요충분조건이다. B 에 관계가 없다는 조건이라는 것을 보여라

5 여집합과 멱집합

만약 A와 B가 집합이라면, A에서 B의 여집합으로 더 잘 알려진 A와 B 사이의 차는 집합 $A - B$로

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$$

라고 정의된다.

중요한 것은 이 정의에서는 $B \subset A$라는 가정이 필요하지 않다는 것이다. 그렇지만 가능한 간단하게 여집합 연산에 관한 기초적 사실을 표기하기 위해서 우리는 (오직 이 섹션에서만) 언급되는 모든 집합들은 어떤 하나 집합의 부분집합들이고 같은 집합 E라고, 그리고 모든 c여집합은 (다르게 표기되지 않는다면) E에 대해 상대적으로 형성된다고 가정한다. 이러한 상황들에서 (그리고 그들이 아주 보통일 때) 전체집합 E를 기억하는 게 그것을 계속 쓰는 것보다 더 쉬워진다. 그리고 이것은 표시법을 간결하게 할 수 있게 만든다. A의 일시적으로 절대적 여집합을 (상대적으로의 반대로서) 위해서 자주 쓰이는 상징은 A'이다. 이 상징의 표현에서 여집합 연산에 관한 기초적 사실들은 다음과 같이 서술될 수 있다:

$$(A')' = A,$$
$$\varnothing' = E, E' = \varnothing,$$
$$A \cap A' = \varnothing, A \cup A' = E,$$
$$A \subset B \iff B' \subset A'.$$

여집합에 관한 가장 중요한 진술들은 De Morgan 법칙이라고 불리는 것들이다:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

(우리는 머지않아서 De Morgan 법칙이 순서쌍보다 더 큰 모임으로서 합집합과 교집합에 적용되는 것을 볼 수 있을 것이다.) 여집합에 대한 이러한 사실은 집합 이론의 정리들이 순서쌍으로부터 온다는 것을 함축한다. 만약 E의 부분집합들의 합집합들, 교집합들 그리고 여집합들을 포함하는 함유 또는 상등에서 우리는 각각의 집합을 그것의 여집합, 합집합과 교집합의 교환으로 대체하고 모든 결론을 뒤집으면, 그 결과는 또다른 정리이다. 이러한 사실은 종종 집합들의 쌍대성 원리라고 말해진다.

여기 몇가지 여집합 연산에 관한 쉬운 예가 있다.

$$A - B = A \cap B'.$$
$$A \subset B \iff A - B = \varnothing$$
$$A - (A - B) = A \cap B$$
$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$
$$A \cap B \subset (A \cap C) \cup (B \cap C')$$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C') \subset A \cup B$$

만약 A 와 B 가 집합들이라면, A 와 B 의 대칭 차집합은 (혹은 Boolean 합) 집합 $A + B$ 로

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

정의된다.

이 연산은 교환 가능하고 $(A + B = B + A)$ 결합적이고 $(A + (B + C) = (A + B) + C)$, $A + \varnothing = A$ 이고 $A + A = \varnothing$ 이다.

이것은 아마 명백한 것을 해결하기에는 적절하지만 때때로 교집합 이론의 헛갈리는 부분이기도 하다. 시작으로 돌아가서, 교집합들은 오직 공집합들에 대해서만 정의되어 있었다는 것을 상기해보자. 그 이유는 공집합에 같은 접근은 집합을 정의할 수 없어서이다. 아래 명제 의해 지정되는 어떤 x's 가 존재하는가?

$$x \in X,\ \varnothing \text{에 있는 모든 } X \text{ 에 대해서}$$

$\varnothing$ 에 관한 일반적인 질문에 대해 해답은 더 쉬운 그에 상응하는 부정적 질문을 확인하는 것이었다. 진술된 조건을 만족시키지 않는 어떤 x's 는 무엇인가? 만약 $x \in X$ 인 $\varnothing$ 에 있는 모든 X 가 있다는 것이 참이 아니라면, 그렇다면 $x \notin X$ 인 $\varnothing$ 에 있는 X's 가 반드시 존재해야 한다; 그러나 $\varnothing$ 에 어떤 X's 도 존재하지 않기 때문에, 이것은 부조리하다. 결론: 진술된 조건을 만족하는 것을 실패하는 x 는 없다, 혹은, 같은 말로, 모든 x 는 그것을 만족시킨다. 다른 말로, 그 조건이 지정하는 x's 는 (무존재적) 공간을 비우게 된다. 여기에 더 이상 깊은 문제는 없다; 그것은 다만 어딘가에 어떤 방식으로 있을 어떤 집합이 공집합이 될 수도 있기 때문에 항상 제한과 예외를 만들어야하는 것에 대한 거부이다. 이것에 관해 증명된 것은 아무것도 없다; 이것은 삶의 사실이다.

만약 우리가 특별한 집합 E 의 부분집합들에 가하는 주의를 제한한다면, 우리가 일시적으로 그럴 것을 동의했듯이, 바로 앞의 단락에서 기술되었던 오해들이 날아갈 것이다. 요점은 그런 경우에 우리는 집합 $\mathcal{C}$ 의 교집합을 (E 의 부분집합들의) 집합이라고 정의할 수 있다는 것이다.

$$\{x \in X : x \in X,\ \mathcal{C}\text{에 있는 모든}X\text{에 대해서}\}$$

이것은 전혀 혁신적인 것이 아니다; 각각의 비어있지 않은 집합에서, 새로운 정의는 예전 것에 동의한다. 예전의 것과 새로운 것의 차이는 공집합을 다루는 방법에 있다; 새로운 정의에 따르면 $\bigcap_{X \in \varnothing} X$ 는 E 이다. (E 의 원소 x 에 대해서 $\varnothing$ 에 있는 모든 X 에 대해서 $x \in X$ 가 거짓일 수 있는가?) 그 차이는 단지 언어의 문제다. 작은 반영이 E 의 부분집합들의 집합 $\mathcal{C}$ 의 교집합의 의미로서 “새로운” 정의는 정말로 집합 $\mathcal{C} \cup \{E\}$ 의 교집합의 예전 정의와 같다는 것과 후자는 절대 비어있지 않다는 것을 보여준다.

우리는 집합 E 의 부분집합들을 봐왔다; 그런 부분집합들이 스스로 집합을 이룰 수 있는가? 다음 원리는 답이 맞다 라는 걸 보장한다.

공리 [멱집합의 공리] 각각의 집합에는 집합들의 콜렉션이 존재하는데, 이 콜렉션은 주어진 집합의 모든부분집합을 원소로 포함한다.

다시말해 E 라는 집합과 콜렉션 집합 $\mathcal{P}$ 이 존재할 때, $X \subset E$ 이면 $X \in \mathcal{P}$ 이다.

위의 집합 $\mathcal{P}$ 은 E 의 부분집합 이외의 집합을 원소로 포함할 수 있다. 이것은 쉽게 보일 수 있는데, 열거의 공리를 이용해 $\{X \in \mathcal{P} : X \subset E\}$ 인 임의의 집합을 만들면 된다. 모든 X 에 대해서, X 가 위의 집합의 원소가 되기 위해 필요한 조건은 X 가 E 의 부분집합 이면 된다. 이 셋을 $\mathcal{P}$ 라하고, 표시법을 바꾸면 다음과 같다.

$$\mathcal{P} = \{X : X \subset E\}$$

집합 $\mathcal{P}$ 는 E 의 '멱집합' 을 의미한다. 외연의 공리는 이 멱집합의 유일성을 보장해준다. $\mathcal{P}$ 의 E 에 대한 의존성은 단순히 $\mathcal{P}$ 가 아닌 $\mathcal{P}(E)$ 로 쓴다.

집합 $\mathcal{P}(E)$ 는 E 에 비해 상대적으로 매우 크기에, 예시를 보이는 것은 어렵다. 만약 $E = \varnothing$ 라면, 간단하게 보일 수 있다. 집합 $\mathcal{P}(\varnothing)$ 는 $\{\varnothing\}$ 뿐이다. $\{\varnothing\}$ 이거나 원소가 2 개인 멱집합은쉽게 표현할 수 있다.

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$$

이고

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \text{ 이다.}$$

세원소의 집합의 멱집합은 8 개의 원소로 되어있다. 당신은 언급했던 것들을 토대로 일반화 된 규칙을 생각할 수 있을 것이다. (그리고 증명을 도전해 보아라.) n 개의 원소를 가진 유한집합의 멱집합은 2^n 개의 원소를 가진다. (물론 '유한한' 이라던가 '2^n' 이라는 개념들은 아직 공인되진 않지만, 비공인된 이해를 방해하진 않는다) 2^n 에서 지수로써의 n 은 멱급수라는 명명이유와 관련이 있다.

만약 $\mathcal{C}$ 가 집합 E 의 부분집합들의 콜렉션이라면 (즉 $\mathcal{C}$ 가 $\mathcal{P}(E)$ 의 부분콜렉션이라면) 다음과와 같이 표시한다.

$$\mathcal{D} = \{X \in \mathcal{P}(E) : X' \in \mathcal{C}\}$$

($\mathcal{D}$ 의 정의를 사용한 내용이 기술적인 측면에서 명확한 문장임을 확실히 하기 위하여, 다음과 같은 형태로 다시 쓰여야만했다.

어떤 Y 의 경우, $Y \in \mathcal{C}$ 그리고 모든 x 에 대하여 $(x \in X \iff x \in E, x \notin Y)$

이와 같은 언급은 논리적이거나 집합론적인 옛날의 정의대신 정의된 약어를 사용하고 싶을 때 종종 이용된다. 번역은 정교함을 거의 요구하지 않으니, 종종 그것을 생략하곤 한다) 관습적으로, 콜렉션 $\mathcal{D}$ 의 합집합과 교집합을 다음과 같은 용어로 적는다.

$$\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X', \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X'$$

드모르간법칙에 의한 일반적 표기 형태는 이렇다.

$$(\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X)' = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X'$$

$$(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X)' = \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X'$$

위의 등식에 대한 증명은 적절한 정의들의 직접적인 결과로써 보여진다.

[연습문제] $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$, $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$ 를 증명하여라. 이 주장은 다음과 같이 일반화된다.

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}} \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X)$$

$$\bigcup_{X \in \mathcal{C}} \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X)$$

일반화된 등식을 나타내고 증명할수 있는 합리적인 해석을 찾아라. 무엇보다 기본이 되는 사실들:

$$\bigcap\nolimits_{X \in \mathcal{P}(E)} X = \varnothing$$

그리고

만약 $E \subset F$ 이면, $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ 이다.

연산 $\mathcal{P}$ 와 $\bigcup$ 의 상호성과 관련된 궁금증이 하나 있다. E 가 항상 $\bigcup_{X \in \mathcal{P}(E)} X$ 와 같음을 보여라 (즉, $E = \bigcup \mathcal{P}(E)$) 그러나 다른 목적으로 $\mathcal{P}$ 와 $\bigcup$ 를 E 에 적용한 결과는 집합라는 사실은 집합이 E 를 전형적인 부분집합으로 포함하고 있다는 것을 보여준다.

6 순서쌍

집합 A의 원소들을 순서에 따라 배열한다는 것은 무슨 뜻일까? 예를 들어, 집합 A가 서로 다른 4개의 수로 이루어진 $\{a, b, c, d\}$ 라고 가정해보자. 그리고 이 원소들의 순서가

$$c\,b\,d\,a$$

라고 생각해보자. 이 문장의 뜻을 정확히 정의하지 않고도 우리는 이론상으로 집합 A를 이용하여 무언가를 할 수 있다. 즉 이 순서 내의 각각의 지점들에 대해 그 지점들 이전과 이후의 모든 원소들의 집합에 대해 고려해볼 수 있다; 이런 식으로 우리는 다음과 같은 집합을 얻을 수 있다.

$$\{c\}\ \{c, b\}\ \{c, b, d\}\ \{c, b, d, a\}$$

우리는 계속해서 집합 $\mathcal{C}$에 대해 생각할 수 있다.

$$\mathcal{C} = \{\{a, b, c, d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{c\}\}$$

이 집합 $\mathcal{C}$는 위의 원소들로 이루어져 있다. 직관에 기초한, 순서에 대한 불분명한 개념은 기초가 탄탄하고 간단한 무엇인가를 생산하는 데 성공해 왔다는 것을 강조하기 위하여, 즉 간단하게, 아무런 조작을 가하지 않은 집합 $\mathcal{C}$와 $\mathcal{C}$의 원소들과 그들의 원소들은 위에 뒤섞여서 나타내어져 있다.

우리가 알고 있는 순서의 뜻에 대해 잠시 동안 계속해서 생각해보자. 우리가 이해할 수 있었던 모든 앞에 나왔던 단락들을 재빨리 훑어 본 것이 집합 $\mathcal{C}$라고 가정하자. 우리가 이것을 만들어온 순서를 다시 포착하기 위하여 이것을 사용할 수 있겠는가? 대답은 '그렇다'로 쉽게 할 수 있다. $\mathcal{C}$의 원소들 중에 나머지 모든 것을 포함하고 있는 한 가지를 찾는다. 왜냐하면 $\{c\}$가 집합을 채우며 (다른 아무것도 채우지 못하는) 우리는 c가 첫 번째 원소가 되어야 한다는 것을 알기 때문이다. 다음은 집합 $\mathcal{C}$ 중에 그 다음으로 작은 원소를 살펴보자. 즉, 그것은 $\{c\}$를 제거한 후에 남아있는 다른 것들을 모두 포함하는 원소를 말한다. 왜냐하면 $\{b, c\}$가 집합을 채우며 우린 b가 두 번째 원소가 되어야 한다는 것을 알기 때문이다. 이러한 과정을 계속하면, 우리는 주어진 순서대로 집합 A를 얻어낼 수 있다.

일반적인 개념은 다음과 같다. 우리는 정확하게 집합 A의 원소들의 순서가 무엇을 뜻하는지 알 수 없다. 하지만 주어진 순서인 그러한 방법으로 우리가 집합 $\mathcal{C}$와 부분 집합 A를 관련시킨 각각의 순서들은 $\mathcal{C}$로부터 유일하게 다시 포착된다. 여기서 자명하지 않은 검증이 있다: 집합 A에서의 순서와 일치하는 집합 A의 부분 집합의 고유의 특징을 찾아보자. "순서"는 아직 우리에게 공식적인 의미를 가지고 있지 않기 때문에, 전체적인 문제는 공식적으로는 무의미하다. 아래에 있는 것들이 해들에 의존한다는 것을 눈여겨 두고, 하지만 독자는 이것을 찾으려고 시도함으로써 귀중한 무엇 인가를 배울 것이다. 돌아가서, A의 순서에 따른 집합 $\mathcal{C}$의 구문은,

위에서 설명한 4 개의 수로 예시되어 있다; 모든 것 순서쌍 하나는 간단하게 적어도 두 번은 되기 때문에. 만약, $A = \{a, b\}$ 그리고 만약, 우리가 바라는 순서대로, a 가 처음에 오고, 그 다음 $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$; 그러나 만약, b가 첫 번째로 온다면, 그러면 $\mathcal{C} = \{\{b\}, \{a, b\}\}$.

a 와 b 의 순서쌍은, 첫 번째 좌표는 a 그리고 두 번째 좌표는 b 일 때, 집합 (a, b) 로 정의 된다.

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

그러나 이 정의의 동기를 확실하게 하기 위해서, 우리는 여전히 순서쌍은 이름을 가져야만 하는 중요한 성질을 가지고 있다는 결과를 증명해야만 한다. 우리는 만약 (a, b) 와 (x, y) 가 순서쌍이고 만일 $(a, b) = (x, y)$ 라면, $a = x$ 이고 $b = y$ 라는 것을 보여줘야만 한다. 이것을 증명하기 위해, 우리는 먼저 a 와 b가 같다고 가정하면, 순서쌍 (a, b) 가 한 개의 $\{\{a\}\}$ 와 같다는 것이다. 반대로 만약 (a, b) 가 한 개이면, $\{a\}$ = $\{a, b\}$ 이고, 그러면 $b \in \{a\}$ 이고, 그러므로 $a = b$ 이다. 지금 $(a, b) = (x, y)$ 라 가정해보자. 만약 $a = b$ 이면, (a, b) 와 (x, y) 는 singleton 이고, 그러면 $x = y$ 이다 ; 때문에 $\{a\} \in (x, y)$ 이고, 이에 따라 a, b, x 와 y 는 같은 것을 알 수 있다. 만약 $a \neq b$ 이면, (a, b) 와 (x, y) 는 정확하게 하나의 singleton 을 포함한다. 즉, $\{a\}$ 와 $\{x\}$ 는 각각, $a = x$ 이다. 이 경우에 이것은 또한 (a, b) 와 (x, y) 는 모두 정확하게 하나의 순서 없는 singleton 이 아닌 순서쌍을 포함하기 때문에, 그러므로 특히 $b \in \{x, y\}$ 이다. b는 x가 될 수 없기 때문에 (그러면 우리는 $a = x$ 와 $b = x$, 그러므로 $a = b$ 의 결과를 얻게 된다.), 우리는 반드시 $b = y$ 를 얻는다, 그리고 증명은 완성된다.

만약 A 와 B 가 집합이라면, a 는 A 에 포함되고 b 는 B 에 포함되는 모든 순서쌍 (a, b) 가 존재할까? 이것은 꽤 쉽게 '맞다' 는 것을 알아낼 수 있다. 참으로, 만약 $a \in A$ 이고 $b \in B$ 이면, 그러면 $\{a\} \subset A$ 이고 $\{b\} \subset B$ 이면, $\{a, b\} \subset A \cup B$ 이다. 또한 $\{a\} \subset A \cup B$ 이기 때문에, $\{a\}$ 와 $\{a, b\}$ 가 $\mathcal{P}(A \cup B)$ 의 원소인 것을 알아낼 수 있다. 이것은 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 이 $\mathcal{P}(A \cup B)$ 의 부분집합임을 암시하고 따라서 이것은 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ 의 원소이다. 즉 a가 A 의 원소이고 b가 B 의 원소이면 (a, b) 가 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ 의 원소이다. 일단 이것이 알려지면, 이것은 A 의 원소 a 와 B 의 원소 b 로 만든 순서쌍 (a, b) 로 구성된 유일한 집합 $A \times B$ 를 나열의 공리와 확장의 공리를 적용하여 생산하는 틀에 박힌 문제가 된다. 이 집합을 A 와 B 의 데카르트 곱이라 부른다. 이것은 다음과 같이 표기한다.

$$A \times B = \{x : x = (a, b),\ a\text{는 }A\text{의 원소이고 }b\text{는 }B\text{의 원소이다.}\}$$

두 집합의 데카르트 곱은 순서쌍의 집합이고 (즉, 각각의 순서쌍을 원소로 가지는 집합), 데카르트 곱의 부분집합도 역시 마찬가지로 성립한다. 이것은 우리가 역방향으로도 갈 수 있다는 것을 아는 데 있어서 기술적으로 중요하다. 모든 순서쌍들의

집합은 두 집합들의 데카르트 곱의 부분집합인 것이다. 즉, 만약 R이 R의 모든 원소가 순서쌍인 집합이라면, 거기에는 R이 $A \times B$의 부분집합을 만족하는 두 집합 A와 B가 존재 한다. 증명은 기초적이다. x는 R의 원소이고, $x = \{\{a\}, \{a, b\}\}$임을 가정하자. 문제는 중괄호로 묶여진 a와 b를 조사하는 것이다. R의 원소들은 집합이기 때문에, 우리는 R에 있는 집합들의 합 집합을 만들 수 있다. x는 R에 있는 집합의 하나이기 때문에, x의 원소들은 그 합집합에 포함된다. $\{a, b\}$는 x의 원소들 중의 하나이기 때문에, 우리는 $\{a, b\} \in \bigcup R$라고 표기할수 있는데, 이것은 앞서 언급했던 엄연한 표기형태이다. 중괄호에 있던 한 집합이 사라졌다. 남아 있는 다른 집합을 사라지게 만들 기 위하여 같은 과정을 반복한다. $\bigcup R$에 있는 집합들의 합집합을 구성하자. $\{a, b\}$가 이 집합들 중의 하나이기 때문에, 이것으로 $\{a, b\}$의 원소들은 그 합집합에 포함된다는 사실을 알 수 있고 그러므로 a와 b 모두 $\bigcup\bigcup R$에 포함된다. 이것은 위에서 만든 가정을 성립시킨다. R을 $A \times B$의 부분집합 중 하나라는 것을 나타내기 위하여 우리는 $\bigcup\bigcup R$이 되도록 A와 B 모두를 고를 것이다. A와 B는 가 능한 한 작게 고르는 것이 바람직하다. 이렇게 하기 위하여,

$$A = \{a : \text{어떤 } b\text{에 대하여 } ((a, b)\text{는}R\text{의 원소})\}$$

와

$$B = \{b : \text{어떤 } a\text{에 대하여 } ((a, b)\text{는 } R\text{의 원소})\}$$

라는 집합들을 만들기 위하여 나열의 공리를 적용하기만 하면 된다. 이 집합들은 각각 첫 번째와 두 번째 좌표들에로 R의 사영들이라고 부른다.

하지만 지금 중요한 집합론에서, 수학이 곧 회복할 것이라고 소망했던 학자들에게 이것은 병으로 간주되기 시작했다. 이러한 이유로 많은 집합론적인 고려들은 병적인 것이라 불렸고 이 단어는 수학적 용법에 남아 있다. 이것은 화자가 좋아하지 않는 것을 자주 언급한다. 순서쌍 $((a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\})$의 명백한 정의는 자주 병적인 집합론으로 격하된다.' 이러한 경우엔 이 이름이 적절하다'고 생각하는 사람들의 편의를 봐주기 위하여, 정의는 지금까지 그것의 목적을 충실히 해왔고, 앞으로는 절대 다시 쓰이지 않을 것이라는 것을 알아두어야 한다. 우리는 순서쌍은 결정되어지는 것이고 특정한 방식으로 첫째, 둘째 좌표를 결정한다는 사실을 알아야 한다.또한 데카르트의 곱은 형성되어 질 수 있으며, 순서쌍들로 이루어진 모든 집합들은 임의의 데카르트의 곱의 부분집합이라는 사실을 알아야한다. 그리고 그 특별한 접근은 목적들이 보잘 것 없음을 성취하게 하는데 사용되었다.

위에서 주어진 순서쌍의 명백한 정의 앞에서 수학자들은 불신과 의심의 늪에 빠지기 쉽다. 문제는 거기에 모든 것이 틀렸다거나 모든 것이 빠져있다는 것이 아니다. 우리가 정의한 개념의 관련된 성질들은 모두 옳고(직관력을 조화시킬때) 모든 옳은 성질들은 남아있다. 문제는 개념이 비본질적이고 혼란스러운 몇몇 무관한 성질들을 가지고 있다는 데에 있다. $(a, b) = (x, y)$이 $a = x, b = y$와 동치라는 정리는 우리가 순서쌍들에 관하여 배우기를 기대하는 종류이다. $\{a, b\}$가 (a, b)의

원소라는 사실은 반면에, 부수적인 것으로 보인다. 이것은 개념의 본질적인 성질이라기보다는 정의의 변종된 성질이다.

인위적임의 대가는 존재하지만 그리 대가가 크지는 않아서 경제적인 개념을 지불할 수가 없다. 순서쌍에 대한 이 개념은 더도 말고 덜도 말고 부가적인 기초로써만 소개되어야 하는데 이때 개념에 대한 올바른 성질들이 공리적으로 더해져야만 한다. 몇몇 이론에서 이것은 이미 행해졌다. 수학자들의 선택은 몇몇 공리들을 더 기억하는 것과 몇몇 우연한 사실들을 까먹는 것이 마주치는 중간에 있다. 유사한 선택들이 수학에서 자주 발생한다. 이 책에서는 예를 들어, 우리는 다양한 종류의 수들의 정의를 연결시키는 과정에서 우연히 그들을 또다시 접하게 된다.

[연습문제] 만약 A, B, X, Y 가 집합들이라면,

(i) $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X)$

(ii) $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (B \times Y)$

(iii) $(A - B) \times X = (A \times X) - (B \times X)$.

만약 A 또는 B 가 공집합이 아니라면, $A \times B$ 는 공집합이다. 그리고 역도 성립한다. 만약 A 가 X 의 부분집합이고 B 가 Y 의 부분집합이면 $A \times B$ 는 $X \times Y$ 의 부분집합이고 역도 성립한다.($A \times B$ 가 공집합이라 아니라고 주어질 때)

7 RELATION

우리는 순서쌍을 이용하여 관계 (relation) 에 관련한 수학이론들을 공식화할수있다. 또한 관계에 의해서 우리는 남성과 여성사이의 결혼이라든지 원소와 집합사이의 포함여부를 나타낼수가 있다. 일반적으로 우리가 관계라고 일컫는 것은 2 개의 요소로 이루어진 binary relation 이다. 3 개의 요소로 이루어진 ternary relation 의 예를 들자면, Cain 이라는 사람의 부모가 Adam 과 Eve 라는 사람들의 조상에 관련한 예를 들수 있겠다. 하지만 이 책에서 우리는 3 개의 요소로 이루어진 ternary relation 과 4 개의 요소로 이루어진 quaternary relation 에 대한 이야기는 다루지 않을것이다.

이제 결혼을 예로 들어 관계에 대해 구체적으로 살펴보자면, 우리는 특정한 순서쌍 (x, y) 를 고려해볼수있다. 다시말해 x 는 남자이고 y 는 여자이며 순서쌍 (x, y) 의 의미는 x 와 y 가 결혼했다는 의미로 볼수 있다. 우리는 아직 관계에 관한 일반적인 개념정의를 하진 않았지만 위 결혼의 예를 통하여 그 개념을 대충 짐작할 수 있으리라 생각된다. 모든 관계는 첫번째 항과 두번째 항의 관련성으로 이루어진 순서쌍의 집합으로 유일하게 결정되어진다. 우리가 관계에 대해 안다면, 집합에 대해 안다는 것이고 우리가 집합에 대해 안다면 그것은 또한 관계에 대해 안다는 것이다. 예를들어, 우리가 설령 결혼의 정의에 대해 잊어버렸더라도 결혼한 사람들의 순서쌍으로 이루어진 집합을 통해 우리는 남자 x 와 여자 y 가 결혼했는지 안했는지에 대해 이야기 할수 있다. 우리는 단지 순서쌍 (x, y) 가 집합에 속해있는지 아닌지를 판단하기만 하면 된다.

우리는 관계가 무엇인지에 대해 모르더라도 집합이 무엇인지에 대해선 알고 있을것이다. 그리고 관계와 집합의 밀접한 관련성에대해 이미 어느정도 추측하고 있을지도 모른다. 관계에 관련한 보다 정교한 집합론적인 접근은 문제해결적인 접근에서 이점을 갖고 있다. 우리가 할수 있는 가장 간단한 일은 관계를 집합과 대응시켜 정의하는 것이다. 우리는 순서쌍의 집합으로 관계를 정의한다. 좀더 명확하게 표현하자면, 집합 R 의 각각의 원소가 순서쌍이라면 집합 R 은 관계이다. 이는 물론 $z \in R$ 이라면 $z = (x, y)$ 인 x, y 가 존재한다는 말과 일치한다. R 이 관계라면 이는 좀더 편리하게 $(x, y) \in R$ 일때

$$x\,R\,y$$

로 표현할수 있다.

이때, 최소한의 관계는 $\varnothing$ 이다. (연습: $\varnothing$ 이 순서쌍이라는 것을 증명하기 위해서는 순서쌍이 아닌 $\varnothing$ 의 원소를 찾아보아라.) 또하나의 예는 집합 X 와 Y 의 카티션곱이다. X 가 임의의 집합이고 R 이 $X \times X$ 상의 순서쌍 (x, y) 의 집합이라 하자. 관계 R 로서 X 의 원소사이의 동등한 관계가 성립한다. x, y 가 X 에 속한다면 $x\,R\,y$ 는 $x = y$ 이다. 또하나의 예를 들어보자. X 가 임의의 집합이고, R 이

$X \times \mathcal{P}(X)$ 상의 순서쌍 (x, A) 로 이루어진 집합이라면 이 관계 R은 X 의 원소와 X 의 부분집합사이의 포함관계를 나타낸다. 다시말해 $x \in X$ 이고 $A \in \mathcal{P}(X)$ 라면 $x\,R\,a$는 $x \in A$ 라는 말과 같다.

앞의 단원에서 우리는 모든 순서쌍의 집합 R과 관련지어 R의 첫번째 두번째 축으로의 사영이라 불리는 두 집합을 보았다. 관계에 관한 이론에서 이들 집합은 R의 정의역과 공역으로 생각하면 된다. 우리는 그들의 정의를

$$\operatorname{dom} R = \{x : \text{for some } y\ (x\,R\,y)\}$$

$$\operatorname{ran} R = \{y : \text{for some } x\ (x\,R\,y)\}$$

라 한다. R이 결혼의 관계로서 $x\,R\,y$는 x는 남자이고 y는 여자이며 x와y는 서로 결혼한 사이라면 dom R은 결혼한 남자의 집합이고 ran R은 결혼한 여자의 집합이다. $\varnothing$ 의 정의역과 공역은 $\varnothing$ 이다. $R = X \times Y$ 라면 dom $R = X$ 이고 ran $R = Y$ 이다. R이 X 에서 동등관계라면 dom $R =$ ran $R = X$ 이다. R이 X 와 $\mathcal{P}(X)$ 사이의 포함관계라면 dom $R = X$ 이고 ran $R = \mathcal{P}(X) - \{\varnothing\}$ 이다.

만약R이 데카르트곱 $X \times Y$(dom $R \subset X$, ran $R \subset Y$) 을 포함하는 관계 (relation) 라면, 가끔은 R이 X 에서 Y 로의 관계라고 말하는 것이 편리하다. X 에서 X 로의 관계는, X 안에서의 관계라 한다. X 의 모든 x에 대해 $x\,R\,x$ 라면 X 안에서의 관계 R은 반사적 (*reflexive*) 이라한다. $y\,R\,x$가 $x\,R\,y$와 같다면 대칭적 (*symmetric*) 이라한다. $x\,R\,y$ 이고 $y\,R\,z$ 일때, $x\,R\,z$ 이면 추이적 (*transitive*) 이라한다. (연습: 이 세가지 특성에 대해, 두가지 특성은 가지지만 하나는 갖지않는 관계를 찾아라.) 만약 반사적, 대칭적, 추이적인 관계가 한 집합 안에 존재한다면 그것은 동치 (equivalence) 관계라 한다. 가장 작은 집합 X 안의 동치관계는 X 안의 상등 (equality) 관계이다. X 안의 가장 큰 동치 관계는 $X \times X$ 이다.

집합 X 안의 동치관계들과 X 의 부분집합의 어떤 모음들 (collections)(분할 (partition) 이라 부름) 사이에는 근접한 관계가 있다. X 의 분할은 합집합이 X 인 공집합이 아닌 X 의 부분집합중 공통원소를 갖지않는 한모음 $\mathcal{C}$ 이다. 만약 R이 X 안의 동치관계이고, x가 X 의 원소라면, R에 관해서는 x의 동등집합 (equivalence class) 은 $x\,R\,y$ 인 모든 X 의 원소 y 의 집합이다. (여기선 “class” 란 표현을 전통적으로 사용한다.) 예: R이 X 안에서 상등 (equality) 라면, 모든 동등집합은 하나씩 일어난다. 만약 $R = X \times X$ 면, 집합X 는 유일한 동치집합이다. R에관해서는 x 의 동등집합에 대한 표준 표시법이 없다. 대체로 x/R로 표현한다. 그리고, 모든 동등집합의 집합은 X/R로 표현한다. X/R은 “X modulo R” 이라 읽고, 또는 줄여서 “X mod R” 이라 한다. (연습: $\mathcal{P}(X)$ 의 부분 집합 X/R 조건으로 하는 특성을 보임으로 X/R이 참의 집합임을 보여라.) 잠시 R을 잊고, X 의 분할 $\mathcal{C}$ 을

새로 보자. $X/\mathcal{C}$ 라 부르는 관계는

$$x \quad X/\mathcal{C} \quad y$$

로 쓰면서 정의 된다. x 와 y 에 대해 집합 $\mathcal{C}$ 와 동등하다. $X/\mathcal{C}$ 는 분할$\mathcal{C}$ 에서 유발된 관계라 부른다.

앞단락에서, X 의 모든 동등 관계를 X 의 부분 집합들의 집합과 어떻게 연관시키는지와 모든 X 의 분할 과 X 의 관계를 연관 시키는 법을 보았다. 동등 관계와 분할의 연계는 $\mathcal{C}$ 에서 $X/\mathcal{C}$ 로 변화(passage) 가 R 에서 X/R 로의 변화와 정반대라는 것으로 설명될수있다. 좀 더 설명하면: R 이 X 안의 동등관계라면, 동등집합들의 집합은 관계 R 을 유발하는 X 의 분할이다. 그리고, $\mathcal{C}$ 가 X 의 분할이라면, 유발된 관계는 동등집합이 $\mathcal{C}$ 인 동등관계이다.

증명을 위해, 동등관계 R 을 보자. 각 x 가 어떤 동등집합에 속하므로 (예, $x \in x/R$), 동등집합들이 합집합이 모든 x 라는 것이 명백하다. 만약 $z \in x/R \cap y/R$ 이라면, $x\,R\,z$ 그리고 $z\,R\,y$ 이 성립하고, 따라서 $x\,R\,y$ 이다. 이것은 만약 두 동등집합이 공통의 한 원소를 가질때, 그 두집합은 일치하거나, 다른 말로, 두 별개의 동등집합은 항상 같은 원소를 갖지 않는 다는 것을 의미한다. 그러므로 동등집합들의 집합은 분별이다. 두 성분이 분별의 같은 집합에 속하는 것은, 정의로, 그것들이 다른 하나로의 관계 R 에 있음을 의미한다. 이것이 우리의 주장 중 첫 반을 증명한다.

나머지 반은 더 쉽다. 분별 $\mathcal{C}$ 와 유발된 관계를 살펴보면, 모든 X 의 성분이 $\mathcal{C}$ 의 어떤 집합에 속하므로, 반사성으로 x 와 x 가 같은 $\mathcal{C}$ 의 집합에 있음을 알 수 있다. 대칭으론, x 와 y 가 같은 $\mathcal{C}$ 의 집합에 속할 때, y 와 x 가 같은 $\mathcal{C}$ 의 집합에 있음은 명백함을 알 수 있다. 추이성으론, x 와 y 가 같은 $\mathcal{C}$ 의 집합에 있고, y 와 z 가 같은 $\mathcal{C}$ 에 있을때, x 와 z 가 같은 $\mathcal{C}$ 에 있음도 역시 명백함을 알 수 있다. X 의 각 x 의 동등집합은 x 가 속하는 $\mathcal{C}$ 의 집합 일 뿐이다. 이것으로 모든 증명이 끝났다.

8 FUNCTIONS

X 와 Y 가 집합이라면 X 에서 Y 로의 함수 f 는 정의역이 X 이고 함수 f 에 속하는 (x, y) 가 X 안의 각각의 원소 x 에 대해 Y 안의 유일한 y 가 존재하는 관계를 갖는다. 이 유일성 조건은 다음과 같이 명백하게 공식화 된다: 만일 $(x, y) \in f$ 이고 $(x, z) \in f$ 이면 $y = z$ 이다. X 안의 각각의 x 에 대하여 $(x, y) \in f$ 를 만족하는 Y 안의 유일한 y 를 $f(x)$ 라고 표기한다. 함수에서는 이러한 표기와 이것과 약간 다른 표기는 좀 더 일반적인 관계에 사용되는 다른 것들을 대신한다. 이제부터, 만약 f 를 함수라 한다면 $(x, y) \in f$ 또는 $x\, f\, y$ 대신에 $f(x) = y$ 라 쓰기로 하자. 원소 y 는 x 에서의 함수 f 의 값이라 불러진다. 동일하게 f 는 x 를 y 로 보낸다 또는 사상한다 또는 변형한다라고 말한다. 사상, 사상한다, 변형, 대응, 그리고 연산과 같은 용어는 함수의 동의어로 빈번히 사용된다. 이 기호

$$f : X \to Y$$

는 때때로 "f 는 X 에서부터 Y 로의 함수다" 라는 의미의 축약이다. X 에서 Y 로의 모든 함수들의 집합은 멱집합 $\mathcal{P}(X \times Y)$ 의 부분집합이고 이 함수들의 집합을 Y^X 라 표기하자.

위에서 나열된 동의어에 의해 제시된 활동의 함축들은 함수가 어떤것을 한다는 것이 아니라 단지 함수가 된다는 것만을 나타낸다. 이러한 불충족은 단어의 다른 사용에 나타난다: 다소 유동적이고 정의되지 않은 것으로 사용되고 함수라 부르기로한 순서쌍들의 집합은 함수의 그래프라 불린다. 수학과 일상생활에서 명확한 집합론적 의미를 지닌 함수의 예들을 찾아보는 것은 쉽다; 우리가 찾고자 하는 모든것은 반드시 수적인 것이 아니라 평면형태의 정보이다. 하나의 예시로 도심 지시판이 있다.

함수의 독립변수는, 이러한 상황에서, 도심의 거주지가 되고 그 값들은 그들의 주소가 된다. 일반적 관계를 위해서, 그리고 특히 함수를 위해, 우리는 정의역과 치역을 정의해왔다. X 에서 Y 로의 함수f 의 정의역은 정의에 의해서 X 와 같지만 그것의 치역은 반드시 Y 와 같을 필요는 없다; 치역은 $f(x) = y$ 를 만족하는 X 에 속한 x 에 대한 Y 에서의 y 들로 구성된다. 만약 f 의 치역이 Y 와 같다면 우리는 f 를 X 에서 Y 위로의 사상이라 말한다. 만약 A 가 X 의 부분집합이면 우리는 $f(x) = y$ 를 만족하는 x 가 A 안에 존재하도록 하는 y 들의 집합을 생각해보려 한다. 이러한 Y 의 부분집합을 f 하에 A 의 이미지라 부르고 $f(A)$ 로 자주 표기된다. 이러한 표기는 좋은 표현은 아니지만 그렇다고 심각할 정도는 아니다. 좋은 표현이 아니라고 하는 이유는 만약A 가 X 의 원소도 되고 X 의 부분집합도 되면 $f(A)$ 라는 기호가 애매모호해지기 때문이다. 이것이 A 에서의 f 의 값을 의미할까 아니면 A 의 원소에서 f 의 값의 집합을 의미할까? 정상적인 수학적 전통에 따르면 우리는 좋지않은 정의를 사용해야하며 의미 파악을 위해 문맥을 살펴본다던가

필요에따라 부가설명을 추가하면서 혼란을 피해야 한다. X 그 자체의 이미지가 f의 치역이라는 것을 주의하자; f 의 'onto'라는 문자는 $f(X) = Y$ 로 표현된다.

만약 X 가 집합 Y 의 부분집합이면 X 안의 각각의 x 에 대해 $f(x) = x$ 로 정의된 함수 f 는 X 에서 Y 로의 포함사상이라 불린다(또는 매입 또는 단사). "... 라 정의된 함수 f" 라는 구절은 그러한 문맥에서 매우 흔히 쓰인다. 물론 그와 같이 표기된 것을 만족하는 유일한 함수가 정말 존재한다는 것을 의미하기위해 의도된 것이다. 특별한 경우에는 이것은 충분히 명백하다; 우리는 $x = y$를 만족하는 $X \times Y$ 안의 모든 순서쌍 (x, y) 들의 집합을 생각해볼 것이다. 비슷한 생각으로 매 경우마다 적용되고 그리고 정상적인 수학적 관습에 따르며 우리는 종종 각 x 에서의 그 값 y를 살펴봄으로써 함수를 표현 한다. 그러한 묘사는 그 집합의 직접적인 설명보다 때때로 더 오래 걸리고, 일이 더욱 까다로워 질 수 있다. 그러나 그럼에도 불구하고 대부분의 수학자들은 독립변수 값의 설명을 다른 무엇보다도 더 알기 쉽다고 여긴다. X 에서 X 로의 포함사상은 X 에서 항등사상이라 불린다.(관계의 용어에서 X 에서의 항등사상은 X 와의 동치관계와 같은것이다.) 그전에 만약 $X \subset Y$ 이면 X 에서 Y 로의 포함사상과 Y 에서의 항등사상 사이에 연관성이있다.; 그러한 연관성은 큰 함수에서 작은 함수를 만들어 내는 일반적인 작업의 특별한 경우가 된다. 만약 f 가 Y 에서 Z 로의 함수이고 X 가 Y 의 부분집합이면, X 에서 Z 로의 함수 g 를 만드는 자연스런 방법이 있다.; $g(x)$ 를 X 안의 각각의 x 에서의 $f(x)$ 로 정의하자. 이 함수 g 는 X 에 대한 함수 f 의 제약(restriction) 이라 불리고, 함수 f 는 Y 에 대한 함수 g 의 확장(extension) 이라 불린다. 곧, 이것은 통상적으로 $g = f|X$ 라고 적는다. 이 제약의 정의는 X 에 들어있는 각각의 x 에 대하여 $(f|X)(x) = f(x)$ 로 나타낼 수 있다. 즉, 치역도 $(f|X) = f(X)$ 라는 것을 알 수 있다. Y 의 부분집합의 포함함수(The inclusion map) 는 Y 의 항등함수(identity map) 의 부분집합의 제약(restriction) 이다.

여기 함수에 관한 간단하지만 유용한 예가 있다. 임의의 두 집합 X 와 Y 가 있다고 하고, $X \times Y$ 의 함수 f 가 X 에 전사함수일때, $f(x, y) = x$ 라고 쓴다고 정의한다. (원칙주의자는 아마도 우리가 $f(x, y)$ 대신 $f((x, y))$ 라고 써야 한다고 주의할 테지만, 그런 사람은 아무도 없다.) 함수 f 는 $X \times Y$ 가 X 에 전사할때의 사영(projection) 이라 불린다. 만약 비슷하게, $g(x, y) = y$ 이면, g 는 $X \times Y$ 가 Y 에 전사할때의 사영이 된다. 여기서의 이러한 용어는 이전의 것과 다르지만 크게 나쁘지 않다. 만약 $R = X \times y$ 이면, 전에는 첫번째 좌표들에 전사하는 R 의 사영이라 불린것은, 이제 사영 f 의 치역범주(range) 가 된다.

더 복잡하고 더 다양하게 관련되는 함수의 예를 다음과 같이 얻을 수 있다. R 이 X 와 동치(equivalence) 관계이고, f 는 $f(x) = x/R$ 로 정의된 X/R 에 전사하는 X 의 함수라고 하자. 이 함수 f 는 종종 X 에서 X/R 까지의 정규함수(canonical map) 라고도 불린다.

만약 f 를 X 가 Y 에 전사하는 임의의 함수라고 가정하면, 이것은 X 에서의 R

과의 동치관계를 증명하는 자연스러운 방법이 존재한다. 즉, $f(a) = f(b)$ 인 경우, $a\,R\,b\,(a, b \in X)$ 라고 쓴다. Y 의 각각의 원소 y 에 대해서, $g(y)$ 가 $f(x) = y$ 인 X 안의 모든 원소 x 의 집합이라고 가정하자. R 의 정의는 $g(y)$ 가 각각의 y 에 대해 R 과 동치류(equivalence class) 관계에 있다는 것을 포함한다. 즉, 다시 말하면, g 는 R 의 모든 동치류의 집합 X/R 에 전사하는 Y 의 함수이다. 함수 g 는 아래와 같은 특별한 속성을 가지고 있다. 만약 u 와 v 가 각각 Y 의 원소라면, $g(u)$ 와 $g(v)$ 는 각각 X/R 의 원소이다. 항상 서로 다른 원소가 각각의 서로 다른 원소에 전사하는 함수를 일대일 (one-to-one) 이라고 부른다.(보통 일대일 대응이라고 한다.) 예시 중에는 포함사상 (Inclusion map) 이 일대일인 것도 있으나, 몇몇의 명백히 특별한 경우를 제외하면 사영은 그렇지 않다.(연습 : 특별한 경우는 무엇인가?)

다음으로 함수들의 정수론적인 양상을 소개하기 앞서 잠깐 빗나가서, 우리의 자연수의 궁극적인 정의의 일부분을 고려해야 한다. 우리는 모든 자연수를 정의하기 위해 필요로 하는 것들을 찾지 않을 것이다. 즉, 우리가 원하는 것은 자연수 중의 처음 3 개의 숫자 뿐이다. 이것은 학습에 도움이 되는 긴 준비학습같은 적당한 조치는 아니지만, 몇몇 독자의 걱정과 일시적인 충격의 위험을 무릅쓰고 우리는 직접적인 정의 로 나아갈 것이다. 여기, 우리는 0, 1, 그리고 2 를

$$0 = \varnothing, \quad 1 = \{\varnothing\}, \quad \text{그리고} \quad 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

라고 쓰기로 정의한다. 다시말하면, 0 은 비어있고, 1 은 0 하나이고, 2 는 $\{0, 1\}$ 의 짝이다. 이 명백한 바보짓에 어떤 방식이 있음을 깨달아라. 집합의 원소의 숫자 $0, 1, 2$ 는 (단어의 일반적인 의미로) 각각 영, 하나, 둘이다.

만약 A 가 집합 X 의 부분집합이면, A 의 고유함수 (characteristic function) 는, $x \in A$ or $x \in X - A$ 를 따라 $\chi(x) = 1$ or 0 을 만족하는 X 에서 2 까지의 함수 χ 이다. 집합 A 에서의 A 의 고유함수의 종속은 χ 대신에 χ_A 라고 써서 나타낸다. 이 함수는 X 의 각각의 부분집합 A(이것은 (X) 의 각각의 원소이다.) A 의 고유함수 (이것은 2^X 의 원소이다.) 가 $\mathcal{P}(X)$ 와 2^X 간에 일대일대응이라는 것을 할당한다. (부연설명 : "$\mathcal{P}(X)$ 에 포함된 A 에게 2^X 에 포함된 원소 χ_A 를 각각 할당하는 함수" 라는 어구 대신에, 통례적으로 줄여서 " 함수 $A \to \chi_A$" 라고 사용된다. 이런 표현으로, 다른 예를 보면, $X \times Y$ 가 X 에 전사할때의 사영은, 함수 $(x, y) \to x$ 라고 불릴 것이고, 집합 X 에서 X/R 로 가는 관계 R 을 가지는 정규함수는 함수 $x \to x/R$ 이라 불릴 것이다.)

[연습문제] (i) $Y^{\varnothing}$ 는 Y 가 공집합이든 아니든 엄밀하게 $\varnothing$ 라 부르는 하나의 원소를 가진다. 그리고 (ii) 만약 X 가 공집합이 아니면 $\varnothing^X$ 는 공집합이다.

9 족 (FAMILIES)

함수 자체보다 함수의 치역이 더 중요하게 여겨지는 경우가 있다. 이러한 경우에는, 용어와 기호의 사용이 상황에 따라 바뀐다. 예를 들어, x가 집합I에서 집합X로의 함수라고 가정하여 보자. (여기서의 문자 I와 X의 선택이 낯설게 느껴질 수 있다.) 정의역I의 원소들은 index라고 불리고, I는 index set, 함수의 범위는 indexed set, 함수 자체는 족 (family), 그리고 index I에서의 함수 x의 값은 족의 term이라고 불리며 x_i 로 표기한다. (이러한 용어x_i의 사용은 확실하게 정해진 것은 아니지만 이에 대한 몇가지 용어들 중 표준적인 형태이다.; 결과적으로 x_i 만을 사용할 것이다.) X의 족 $\{x_i\}$ 또는 X의 임의의 원소의 족 $\{x_i\}$ 라고 말하는 것은 공식적으로 받아들여 지긴 힘들지만 기호를 사용하고 강조할 때 일반적으로 사용되는 방법이다; 필요하다면 $(i \in I)$와 같은 괄호식 표현으로 index set I에 대해 언급하자. 그래서, 예를 들어 "X의 부분집합 족 $\{A_i\}$" 라는 구절은 대개 index들을 모아놓은 어떤 집합I에서 $\mathcal{P}(X)$로의 함수A를 의미하는 것으로 이해된다.

만약에 $\{A_i\}$가 X의 부분집합의 족이라면, 족의 치역의 합집합은 족 $\{A_i\}$의 합집합으로 불리거나 또는 집합들 A_i의 합집합으로 불린다; Index set I를 강조하는 것이 중요하느냐 중요하지 않느냐에 따라 표준적인 기호는 다음과 같다.

$$\bigcup_{i\in I} A_i \text{ 또는 } \bigcup_i A_i$$

이것으로부터 합집합의 정의에 의해 $x \in \bigcup_i A_i$와, 적어도 하나 이상의 i에 대해서 A_i에 속하는 x가 있다는 것이 동치 관계임을 알 수 있다. 만약 $I = 2$여서 족 $\{A_i\}$가 순서가 없는 쌍 $\{A_0, A_1\}$이라면, $\bigcup_i A_i = A_0 \cup A_1$이 된다. 임의의 집합들의 모임 대신에 집합들의 족들을 고려하는 것이 일반성을 잃지 않는 지 생각하여 보자; 모든 집합들의 모임은 족의 일부분이 된다. 만약 $\mathcal{C}$가 집합들의 모임이면, $\mathcal{C}$는 index set의 역할을 한다고 하자. 그리고 족 내에서 $\mathcal{C}$ 위에서의 대응을 고려해 보면 위 사실에 대해 알 수 있다.

두 집합에 관한 합집합의 연산을 만족하는 대수적 법칙들은 임의의 합집합에도 적용될 수 있다. 예를 들어, $\{I_j\}$는 집합I_j 들의 족이라고 하자.($\{I_j\}$의 정의역은 J); 또 $K = \bigcup_j I_j$라 하고 $\{A_k\}$가 집합A_k 들의 족이라고 하자.($\{A_k\}$의 정의역은 K) 그럼 다음과 같은 사실을 어렵지 않게 증명할 수 있다.

$$\bigcup_{k\in K} A_k = \bigcup_{j\in J}(\bigcup_{i\in I} A_i);$$

이것은 합집합에서 사용되는 결합법칙의 일반화된 형태이다.

[연습문제] 교환법칙의 일반화된 형태를 공식화하고 이를 증명하라.

원소가 없는 족들의 원소들의 합집합은 논리적으로 생각할 수 있지만 (이것은 합하기전의 상태와 동일.), 원소가 없는 족의 원소의 교집합은 논리적으로 생각하기 어렵다. 이러한 특수한 것들을 제외하고, 교집합의 용어와 기호는 모든 측면에

서 합집합과 유사하다. 그래서, 예를 들어 $\{A_i\}$ 가 집합들의 족이고 그족이 원소를 가지면 족의 치역의 교집합은 족 $\{A_i\}$ 의 교집합 또는 집합 A_i 들의 교집합으로 불린다; 일반적으로 쓰이는 기호는 index set I 를 강조하는 것이 중요하느냐 중요하지 않느냐에 따라 다음과 같이 쓰인다.

$$\bigcap_{i\in I} A_i \text{ 또는 } \bigcap_i A_i,$$

"공집합이 아닌 족" 라는 말에 의해서 우리는 족 내의 정의역 I 가 공집합이 아니라는 것을 알 수 있다.) 이것으로부터 교집합의 정의에 의해 $I \neq \varnothing$ 이면, x 가 $\bigcap_i A_i$ 에 속한다는 것과 x 가 모든 i 에 대해서 A_i 에 속한다는 것이 동치라는 것을 알 수 있다.

교집합에서의 일반화된 교환, 결합법칙은 합집합에서와 같은 방법으로 증명되고 공식화 될 수 있다. 다른 방법으로는 De Morgan 의 법칙을 사용하여 합집합에 대한 사실들로부터 교환, 결합법칙을 이끌어 낼 수도 있다. 이 과정은 거의 자명하므로 생략하기로 하자. 이 흥미로운 대수적 성질들은 합집합과 교집합을 모두 관련시켜도 성립한다. 그래서, 예를 들면, $\{A_i\}$ 가 X 의 부분집합의 족이고 $B \subset X$ 이면 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

$$B \cap (\bigcup_i A_i) = \bigcup_i (B \cap A_i)$$

그리고

$$B \cup (\bigcap_i A_i) = \bigcap_i (B \cup A_i);$$

이 식들은 분배법칙을 준일반화 시킨 형태로 볼 수도 있다.

[연습문제] 만약 $\{A_i\}$ 와 $\{B_j\}$ 가 집합들의 족이라면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$(\bigcup_i A_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$$

그리고

$$(\bigcap_i A_i) \cup (\bigcap_j B_j) = \bigcap_{i,j} (A_i \cup B_j)$$

기호설명 : $\bigcup_{i,j}$ 부호는 $\bigcup_{(i,j)\in I\times J}$ 의 축약형이다

카테시안곱의 개념을 일반화하는데 일반적으로 족들의 기호가 사용된다. 두집합 X, Y 의 카테시안곱은 X 안의 원소 x, Y 안의 원소 y 에 대하여, 순서쌍 (x, y) 들을 모두 모아놓은 집합으로 정의된다. 이 집합과 족들의 카테시안곱 사이에는 자연스럽게 1-1 대응이 형성된다. $a \neq b$ 인 순서가 없는 쌍 $\{a, b\}$ 에 의해 index 되어 $z_a \in X, z_b \in Y$ 를 만족시키는 모든 족z 들의 집합 Z 를 생각하자. 만약 Z 에서 $X \times Y$ 로의 함수 f 가 $f(z) = (z_a, z_b)$ 로 정의된다면, f 는 1-1 대응이 보장된다. Z 와 $X \times Y$ 는 표기상 차이가 있을 뿐이다. 카테시안곱$X \times Y$ 를 일반

화시킨다는 것은 $X \times Y$ 자체보다는 Z를 일반화시킨다는 것이다. (결론적으로 특별한 경우부터 일반원칙까지의 논쟁에 있어서 아주 조그만 용어 사용의 마찰이 있다. 이것을 해결하기 위해서는 오늘날 어떤 수학적 용어가 실제로 사용되는지를 고려하는 것 말고는 방법이없다.) 이것은 쉽게 일반화 할 수 있다. 만약$\{X_i\}$가 집합들의 족이면$(i \in I)$, 이 족들의 카테시안곱은 정의에 의해서 I 안의 각각의 i에 대하여 $x_i \in X$ 인 $\{x_i\}$ 의 집합이다. 현재 어느정도 사용되고 있는 카테시안곱의 기호가 몇 개있다. 이 책에서는 그 기호를

$$\times_{i \in I} X_i \text{ 또는 } \times_i X_i$$

로 표현하겠다.

만약 X_i가 집합 X와 같다면, $\times_i X_i = X^I$ 은 명확해 진다. 예를 들면, 만약 I가 $a \neq b$를 만족하는 쌍 $\{a, b\}$ 이면, $\times_{i \in I} X_i$ 를 통상적으로 카테시안곱 $X_a \times X_b$ 라고 본다. 그리고 만약 $I = \{a\}$ 라면, 위의 것과 유사하게 $\times_{i \in I} X_i$ 를 X_a 로 본다. 세, 네개의 원소를 갖는 순서쌍들은 어떤 족들로 정의가 되는데, 이 족들의 index set들은 순서가 없는 세, 네개의 쌍들이다. $\{X_i\}$가 집합들의 족이라 가정하고 X를 X_i 들의 카테시안곱이라고 하자.$(i \in I)$

만약 J가 I의 부분집합이면, X의 각각의 원소에 대하여, 부분적인 카테시안곱 $\times_{i \in J} X_i$ 의 원소들을 자연스럽게 대응시킬 수 있다. 이 대응을 정의하기 위해서, X의 각각의 원소 x가 족$\{x_i\}$ 이 됨을 떠올려 보아라. (즉, 앞에서의 I에서의 함수); $\times_{i \in J} X_i$ 에 대응되는 원소(이를 y라 부르자)는 단순히 그 함수의 정의역을 I에서 J로 제한함으로써 구할 수 있다. $i \in J$ 일 경우, 우리는 $y_i = x_i$ 라 적는다. 이 대응 $x \to y$ 는 X에서 $\times_{i \in J} X_i$ 위로의 사영이라 불린다. 임시적으로 그것을 f_J 라 표기하자. 만약, J가 특별히 하나의 원소만 가지면($J = \{j\}$ 라 말하자), 우리는 f_J 을 ($f_{\{j\}}$ 대신에) f_j 라 적자. "사영" 이란 단어는 다양하게 사용된다; 만약 $x \in X$ 이면, x에서 f_j 의 값,x_j 도 X_j 위로의 x의 사영이라 불린다. (x_j 는 x의 j-*coordinate* 라고도 불린다.) X와 같은 카테시안곱에서의 함수는 다변수 함수라 불리고, 특별히, 카테시안곱 $X_a \times X_b$ 에서의 함수는 이변수라 함수라 불리운다.

[연습문제] $(\bigcup_i A_i) \times (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_j)$ 임을 증명하고, (정의역이 공집합이 아닌 족들의) 교집합의 경우에도 같은식이 성립함을 증명하여라. (원소가 없는 족에 대한 알맞은 성질을 이용하여) 각각의 index j 에 대하여 $\bigcap_i X_i \subset X_j \subset \bigcup_i X_i$ 임을 증명하고, 교집합과 합집합이 이러한 결론의 극단적인 답으로써의 특성을 가짐을 증명하여라. 이것은 만약 각각의 index j 에 대하여 $X_j \subset Y$ 이면, $\bigcup_i X_i \subset Y$ 이고, 또한 $\bigcup_i X_i$ 이 이 최소한의 조건을 만족시키는 유일한 집합임을 의미한다; 교집합의 경우도 비슷하다.

10 역함수와 합성함수

X 에서 Y 로의 모든 함수 f 에 대하여, $\mathcal{P}(X)$ 에서 $\mathcal{P}(Y)$ 로의 함수, 다시 말해 X 의 각각의 부분집합 A 가 Y 의 상부분집합 $f(A)$ 에 대응하는 함수가 존재한다고 하자. 함수 $A \to f(A)$ 의 대수적 성질에 대한 다음 명제는 참이다. "$\{A_i\}$ 를 X 의 부분집합들의 집합이라 하면 $f(\bigcup_i A_i)) = \bigcup_i f(A_i)$ 이다." 하지만, 교집합 연산에 관하여 위 명제는 거짓이며 f 의 상과 여집합의 관계에서도 만족되지 못한다.

X 의 원소들과 Y 의 원소들 사이의 대응으로부터 언제나 X 의 부분집합들과 Y 의 부분집합들 사이의 대응이 유도된다. (상들의 형성에 의해서가 아니라 역상들의 형성에 의해) X 에서 Y 로의 함수 f 가 주어지면 f^{-1} 는 $\mathcal{P}(X)$ 에서 $\mathcal{P}(Y)$ 로의 함수로써 다음 성질을 만족한다. 만약 $B \subset Y$ 이면 $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. $f(B)$ 는 그 상들이 B 의 원소인 X 의 원소들의 모임이며 $f^{-1}(B)$ 를 f 에 대한 B 의 역상이라 한다. 함수 f 가 X 에서 Y 로의 전사함수가 될 필요충분조건은 다음과 같다. "Y 의 공집합이 아닌 부분집합의 역상은 X 의 공집합이 아닌 부분집합이다." 또한 f 가 X 에서 Y 로의 단사함수가 될 필요충분조건은 다음과 같다. "치역의 원소 각각에 대해 그 역상은 X 의 원소 중에 유일하게 존재한다."

f 가 두 번째 조건을 만족한다면 (단사함수라면) 기호 f^{-1} 는 두 번째 해석으로 받아들인다. 다시 말해 f^{-1} 의 정의역은 f 의 치역이고 f 의 치역의 원소 y 에 대해 그 상 x 는 X 의 원소 중 유일하며 $f(x) = y$ 이다. 이런 표기법의 사용은 f^{-1} 의 첫 번째 해석과 약간 다르지만 두 가지 의미가 혼동되는 일은 별로 없다.

상과 역상 사이의 관계는 고려할 만한 가치가 있다.

만약 $B \subset Y$ 이면,

$$f(f^{-1}(B)) = B.$$

(증명) $y \in f(f^{-1}(B))$ 라 하자. 그럼 $f^{-1}(B)$ 의 원소 x 에 대해 $y = f(x)$ 이다. 이는 $y = f(x)$ 이고 $f(x) \in B$ 임을 의미한다. 따라서 $y \in B$ 이다. □

만약 f 가 전사함수이면, $f(f^{-1}(B)) = B$.

(증명) $y \in B$ 이면 X 의 원소 x 에 대해 $y = f(x)$ 가 성립한다. 따라서 그 x 는 $f^{-1}(B)$ 의 원소이고, 이는 $y \in f(f^{-1}(B))$ 임을 의미한다. □

만약 $A \subset X$ 이면, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(증명) $x \in A$ 이면 $f(x) \in f(A)$ 이다. 따라서 $x \in f^{-1}(f(A))$ 이다. □

만약 f 가 단사함수이면, $A = f^{-1}(f(A))$.

(증명) $x \in f^{-1}(f(A))$ 라 하면 $f(x) \in f(A)$ 이다. 따라서 A 의 어떤 원소 u 에 대해 $f(x) = f(u)$ 이다. 따라서 $x = u$ 이고, $x \in A$ 이다. □

f^{-1} 의 대수적 성질은 예외 없이 성립한다. 만약 $\{B_i\}$ 를 Y 의 부분집합들의 집합이라 하면 다음 두 가지가 모두 성립한다.

$$f^{-1}(\textstyle\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$$

and

$$f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$$

이 성질들은 직접적으로 증명된다. 예를 들어, $x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i)$ 이면 모든 i 에 대해 $f(x) \in B_i$ 이므로 $x \in f^{-1}(B_i)$ 이다. 따라서 $x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i)$ 이다; 이 과정의 모든 순서를 역으로 해도 성립한다. 역상에 대한 이런 구조는 여집합에 대해서도 적용될 수 있다. 즉, Y 의 모든 부분집합 B 에 대해,

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$$

이다.실제로, 만약 $x \in f^{-1}(Y - B)$ 이면 $f(x) \in Y - B$ 이므로 $x \in f^{-1}(B)$ 이다. 그러므로 $x \in X - f^{-1}(B)$ 이다; 이 과정의 모든 순서를 역으로 해도 성립한다. (위 방정식은 사실 역상에 대한 여집합과 여집합에 대한 역상이 같음을 말한다. 즉 교환법칙이 성립한다.)

역함수에 관한 논의를 통해, 우리는 함수의 대응관계를 특정한 방법으로 이해할 수 있다. 이제 두 함수의 작용을 하나의 단계로 표현할 수 있음을 살펴보자. f 가 X 에서 Y 로의 함수이고 g 가 Y 에서 Z 로의 함수라 하자. 그럼 f 의 치역의 모든 원소는 g 의 정의역에 속한다. 결과적으로 $g(f(x))$ 는 X 의 모든 원소 x 에 대해 의미를 갖는다. $h(x) = g(f(x))$ 로 정의된 함수는 X 에서 Z 로의 함수이며 f 와 g 의 합성함수라 말한다. 또한 h 는 $g \circ f$ 또는 더 간단히 gf 로 표시한다. 합성함수에서는 대응의 순서가 중요하다. gf 가 정의되기 위해서는 f 의 치역이 반드시 g 의 정의역에 포함되어야 하며, 역 방향의 합성함수가 정의될 필요는 없다. 또한 fg 와 gf 가 둘 다 정의된다고 해서 fg 와 gf 가 같은 함수일 필요는 없다. 다시 말해서 합성함수에서는 교환법칙이 성립하지 않는다.

합성함수에서 교환법칙은 성립하지 않지만, 결합법칙은 성립한다. f 가 X 에서 Y 로의 함수, g 가 Y 에서 Z 로의 함수이고 h 가 Z 에서 U 로의 함수이면, h 와 gf 의 합성함수와 hg 와 f 의 합성함수를 만들 수 있다: 두 경우에 대한 합성함수가 같음을 보이는 것은 간단하다. 가역과 합성 사이의 관계는 중요하며, 이는 수학 전반에 걸쳐 등장한다. 만약 f 가 X 에서 Y 로의 함수이고 g 가 Y 에서 Z 로의 함수이면 f^{-1} 는 $\mathcal{P}(X)$ 에서 $\mathcal{P}(Y)$ 로의 함수이고 g^{-1} 는 $\mathcal{P}(Z)$ 에서 $\mathcal{P}(Y)$ 로의 함수이다. 이 경우 두 합성함수 gf 와 $f^{-1}g^{-1}$ 가 존재하며 두 번째 합성함수는 첫 번째 것의 역함수이다.

(증명) $x \in X$ 이고 $C \subset Z$ 일 때 $x \in (gf)^{-1}(C)$ 라 가정하자. 그럼 $g(f(x)) \in C$ 이므로 $f(x) \in g^{-1}(C)$ 이다. 따라서 $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$ 이다; 증명의 각 단계를 역으로 해도 성립한다. □

함수의 역과 합성은, 관계 R 에서의 같은 연산들의 특수한 경우이다. 따라서 X 에서 Y 로의 모든 관계 R 에 대해 Y 에서 X 로인 역관계 R^{-1} 가 존재한다; 정의에 의해 yRx 는 $xR^{-1}y$ 를 의미한다. 예: 만약 R 이 X가 $\mathcal{P}(X)$ 의 포함됨을 나타내는

관계라면 R^{-1} 은 $\mathcal{P}(X)$ 가 X 를 포함함을 나타내는 관계이다. R^{-1} 의 정의역이 R 의 치역과 같고, R^{-1} 의 치역이 R 의 정의역과 같음은 정의로부터 바로 알 수 있다. 만약 관계 R 이 함수이면, 동일한 관계 xRy 와 $yR^{-1}x$ 는 동치인 형태 $R(x) = y$ 와 $x \in R^{-1}(\{y\})$ 로 표현할 수 있다.

교환법칙이 성립하지 않기 때문에, 함수의 합성을 일반화 할 때는 주의해야한다. R 이 X 에서 Y 로의 관계이고 S 가 Y 에서 Z 로의 관계일 때, 두 관계 R 과 S 의 합성이 정의된다. 그 합성관계 T(X 에서 Z 로의) 는 $S \in R$ 로 표시하며 더 간단히 SR 로 표시한다; 여기서 다음 두 명제는 동치이다. "xTz 가 정의된다." "xRy 이고 ySz 인 Y 의 원소 y 가 존재한다." 한 가지 예로, 인간남성의 집합에서 관계 R 은 '아들' 을, 관계 S 는 '형제' 를 의미한다고 하자. 다시 말해서, sRy 는 x 가 y 의 아들임을, ySz 는 y 가 z 의 형제임을 의미한다면, 이때 합성관계 SR 은 '조카' 를 의미한다. (질문: $R^{-1}, S^{-1}, RS, R^{-1}S^{-1}$ 은 각각 무엇을 의미하는가?) 만약 R 과 S 가 모두 함수이면, xRy 와 ySz 는 각각 $R(x) = y$ 와 $S(y) = z$ 로 쓸 수 있다. 따라서 $S(R(x)) = z$ 와 xTz 는 동치이고, 함수의 합성은 '관계곱' 이라 불리는 것의 특수한 경우이다.

관계에 대해서든 함수에 대해서든, 역과 합성의 대수적 성질은 같다. 그러므로 합성에서의 교환법칙은 어떤 경우에만 성립하지만, 결합법칙은 항상 성립한다. 또한, 합성과 역은 항상 $(SR)^{-1} = R^{-1}S^{-1}$ 인 관계를 만족한다.

관계에 대한 대수학에는 몇 가지 재미있는 식이 존재한다. 한 집합 X 에서의 관계를 생각해 보자. 그리고 I 를 X 에서 '같음' 을 나타내는 관계라 하자. 관계 I 는 마치 곱셈에 대한 항등원처럼 작용한다; 즉, X 에서의 모든 관계 R 에 대해 $RI = IR = R$ 이다. 질문: I, RR^{-1}, $R^{-1}R$ 사이에는 어떤 관련이 있는가? 다음 세 가지 성질을 만족하는 관계 R 을 동치관계라 정의한다. $I \subset R$ (반사성, reflexivity), $R \subset R^{-1}$ (대칭성, symmetry), $RR \subset R$ (추이성, transitivity)

[연습문제] (각각의 경우 f 는 X 에서 Y 로의 함수이다.)

1. 만약 g 가 Y 에서 X 로의 함수이고 gf 가 X 에서 항등함수라면, f 는 단사함수이고 g 는 Y 를 X 에 전사시킨다.

2. X 의 모든 부분집합 A 와 B 에 대하여 $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$ 일 필요충분조건은 f 가 단사함수라는 것이다.

3. X 의 모든 부분집합 A 에 대하여 $f(X - A) \subset Y - f(A)$ 일 필요충분조건은 f 가 단사함수라는 것이다.

4. X 의 모든 부분집합 A 에 대하여 $Y - f(A) \subset f(X - A)$ 일 필요충분조건은 f 가 X 를 Y 에 전사시킨다는 것이다.

11 Numbers 수

두 개란 얼마를 뜻하는가? 더 일반적으로, 우리는 수를 어떻게 정의할 것인가? 이 질문들에 답하기 위해 X 라는 집합을 생각해보자. 각각 X 에서 추출하고 $a \neq b$ 인 모든 비(非)순서쌍 $\{a, b\}$ 로 어떠한 모임 P 를 만들자. 이 모임 P 에 있는 모든 집합들이 공통적인 성질을 갖고 있는 것을 알 수 있다. 다시 말해서 두 원소로 이루어졌다는 성질을 들 수 있다. 우리는 P 에 있는 모든 집합들이 갖고 있는 공통적인 성질을 "둘이라는 것" 이라고 정의하고 싶은 유혹이 생기지만, 그 유혹에 넘어가서는 안 된다. 그러한 정의는 결국 수학적으로 말이 되지 않는다. "성질" 이라는 것이 무엇인가? P 의 모든 집합들이 한 가지 성질만 공통적으로 갖는지 우리는 어떻게 알 수 있겠는가?

잠시 깊이 생각해보면 우리는 "공통적인 성질" 이라는 애매한 표현을 쓰지 않고도 명시된 정의 뒤에 있는 아이디어를 얻어낼 수 있는 방법을 찾아낼 수도 있다. 성질을 집합으로 확인하는 것은 보편적인 수학적 실행인데, 다시 말해서, 어떠한 성질을 갖고 있는 모든 것들을 포함한 집합에서 그렇게 하지 못할 이유가 있겠는가? 왜 "둘" 을 집합 P 로 정의하지 않으면 안 되는가? 가끔 이런 일들이 행해지지만, 완전히 만족스럽지는 않다. 문제는 이 변경된 현재의 제안이 P 에 종속 되는 것이고, 그러므로 궁극적으로 X 에 종속된다는 것이다. 이 제안은 기껏해야 "둘이라는 것" 을 X 의 부분집합으로 정의할 뿐이고, 이것은 X 에 포함되지 않은 집합에 대해서 "둘이라는 것" 을 말할 때 어떠한 힌트도 주지 않는다.

이를 해결하기 위해서는 두 가지 방법이 있다. 한 가지 방법은 조건을 특정한 집합으로 제한하지 않고 대신 $a \neq b$ 인 가능한 모든 비순서쌍 $\{a, b\}$ 를 고려하는 것이다. 이러한 비순서쌍은 집합을 구성하지 않는다. "둘" 의 정의를 그것들에 적용시키기 위해서는 고려하고 있는 모든 이론이 "비(非) 집합" 의 범위까지 포함할 수 있도록 확장되어야 한다. 이것은 가능한 일이지만 여기서는 하지 않을 것이고 우리는 다른 방법을 따를 것이다.

수학자는 어떻게 1 미터를 정의하는가? 위에 나타난 것과 유사한 방법이라면 다음 두 단계를 포함한다. 첫째, 정의가 되도록 의도된 물체를 고른다. 달리 말해서, 무엇이 되었건간에 직관적이나 현실적인 근거로 1 미터 길이라고 불리는 물체를 고른다. 둘째, 고른 물체와 같은 길이를 가진 전 우주의 물체들로 집합을 이루고, 이 집합의 특징을 1 미터라고 정의한다. (이것은 미터가 무엇인지 아는 것과는 별개다.) 1 미터란 어떻게 정의되는가? 이 질문에 대한 답이 수의 정의에 대한 접근을 제안하도록 하기 위해 위의 예를 선택하였다. 중요한 것은 미터에 대한 관습적인 정의에서 두 번째 단계가 생략된 것이다. 다소 임의적인 관습에 의해 한 물체를 선택하고 그것의 길이를 1 미터라고 부른다. 만약 그 정의가 순환적이라고 비난을 받는다면 (길이란 무엇인가?) 완벽한 논증적 정의로 쉽게 전환될 수 있다. 우리가 1 미터를 선택된 어떠한 사물과 같다고 말하는 데에는 아무런 문제가 없다. 이 논증

적인 접근이 수용되면, 어떠한 새로운 사물이 전에 선택된 기준의 사물과 길이기 같을 때 "1 미터 라는 것" 을 쉽게 설명할 수 있다. 다시 한 번 말하지만, 여기서 두 사물의 길이가 같은지 아닌지를 결정하는 것은 길이라는 것의 정확한 정의를 따르는 것이 아니라 오직 두 사물의 비교라는 단순한 행동에 의존하는 것이다.

위에서의 사고방식에 자극을 받아, 우리는 이전에 (직관적으로) 정확히 두 개의 원소를 가진 집합으로 2 라는 것을 정의하였다. 그 기준이 된 집합은 어떻게 선택되는가? 다른 수를 위해 기준이 되는 집합은 어떻게 선택되어야 하는가? 이 질문에 수학적으로 더 이성적이고 더 맞는 답은 없다. 단지 취향의 차이일 뿐이다. 그 선택에는 단순성과 경제성이 고려되어야 한다. 어떤 특정한 선택에 동기를 부여하기 위해서 예를 들어, 7 이라는 수가 원소 일곱 개를 갖는 어떤 집합에 의해 정의되었다고 치자. 그러면 이 경우에 우리는 8 이라는 수는 어떻게 정의할 것인가? 정확히 여덟 개의 원소를 갖는 집합을 어디에서 찾아낼 것인가? 우리는 7 이라는 집합에서 원소 일곱 개를 찾을 수 있지만, 여덟 번째 원소는 어디에서 가져 올 것인가? 마지막 질문에 대한 그럴싸한 답변은 7 이라는 수 그 자체 (집합) 이다. 이 제안은 8 을 7 의 7 개의 원소를 포함하고 7 까지도 함께 포함하는 집합이 되도록 정의하자는 것이다 이 제안을 따르면 각 수는 바로 앞의 수의 집합과 같음을 알 수 있다.

앞의 구절은 모든 집합에 합당하는 집합론적 구조를 유발하지만, 그것은 오로지 숫자의 구조에만 관심이 있다. 모든 집합 x 에 대해 우리는 x 의 계승자 x^+ 를 x 의 원소에 x 를 합해 얻어지는 집합이라고 정의한다. 다르게 말하면,

$$x^+ = x \cup \{x\}.$$

(x 의 계승자는 흔히 x' 로 표시된다.) 이제 자연수를 정의해보자. 0 을 원소가 하나도 없는 집합으로 정의한다면, (앞에서 했던 것처럼) 선택의 여지없이 다음과 같이 써야한다.

$$0 = \varnothing.$$

만약 모든 자연수가 자신보다 작은 수들로 이루어진 집합으로 설명된다면, 1 이나, 2 나, 3 을 정의내릴 때도 선택의 여지가 없다; 다음과 같이 써야만 한다.

$$\begin{aligned} 1 &= 0^+ (= 0), \\ 2 &= 1^+ (= 0, 1), \\ 3 &= 2^+ (= 0, 1, 2), \end{aligned}$$

등등. 여기서 "등등" 은 이제 이 일반적 기수법을 받아들여 더 이상의 설명을 하거나 양해를 구하지 않고도 "4" 나 "956" 같은 숫자들을 편히 사용할 것을 의미한다.

그러나 지금까지 살펴본 것만으로, 계승자들은 자신과 같은 하나의 집합으로 무한히 만들어질 수 있다고 단정 지을 수는 없다. 그렇다면 새로운 집합론적 원리가

필요하다.

공리 [무한의 공리] 0을 포함하고 자신의 각각의 원소의 계승자를 포함하는 집합이 존재한다.

무한의 공리의 명칭에는 확실한 이유가 있어야 한다. 아직 무한의 정확한 정의는 주어지지 않았지만, 위의 공리가 가리키는 집합들은 무한이라고 불려도 합당해 보인다.

임시적으로, $0 \in A$ 이고, $x \in A$ 일 때 $x^+ \in A$ 이면 집합 A 를 계승집합이라고 하겠다. 이 무한의 공리를 빌리면 간단하게 계승집합 A 가 존재한다고 할 수 있다. 계승집합의 공집합이 아닌 모든 집합족의 교집합은 계승집합 자신이므로 (그 증명은?), A 에 포함되는 모든 계승집합들의 교집합은 계승집합 ω 이다. 집합 ω 는 모든 계승집합의 부분집합이다. 실제로, 만약 B 가 임의의 계승집합이면, $A \cap B$ 또한 계승집합이다. $A \cap B \subset A$ 이므로, 집합 $A \cap B$ 는 ω 의 정의에 들어가는 집합 중 하나이다. 따라서 $\omega \subset A \cap B$ 이며, 결과적으로, $\omega \subset B$ 이다. 이렇게 형성된 최솟값 속성은 ω 를 오직 하나로 특징짓는다. 확장의 공리는 다른 모든 계승집합에 포함되는 계승집합이 오로지 하나뿐이라는 것을 보장한다. 정의에 의해 자연수는 가장 작은 계승집합 ω 의 한 원소이다. 이러한 정의는 자연수가 $0, 1, 2, 3 \ldots$ 등으로 구성되어 있다는 직관적 서술과 상응한다. 주제에 잠깐 벗어난 언급을 하자면, 모든 자연수들의 집합으로 사용하는 기호 (ω) 는 큰 차이는 아니지만 이 주제에 대해 글을 쓴 사람들에게 과반수의 찬성을 얻었다. 이 책에서 그 기호는 위의 정의에 맞게 체계적이고 독점적으로 쓰일 것이다

대부분의 독자들은 자연수의 정의에 대해 약간의 불편함을 느낄 것이다. 그 원인은, (이전에 순서쌍의 정의에서처럼), 정의된 대상이 그것과 관계가 없는 어떤 구조를 갖는다는 것에 있다. 이것은 문제가 있는 것처럼 보이지만, 실제로는 해가 되지 않는다. 우리는 7 의 계승자는 8 이라고 하고 싶다. 그러나 7 이 8 의 부분집합 또는 7 이 8 의 한 원소라고 불리는 것은 혼란스러운 것이다. 그러나 우리는 자연수의 상부구조를 자연수의 가장 중요한 본래의 성질들을 이끌어 낼 수 있을 정도까지만 사용할 것이다. 그 후 상부구조는 잊어도 문제없다.

첨수집합이 자연수이거나 모든 자연수의 집합인 집합족 $\{x_i\}$ 를 각각 유한수열 또한 무한수열이라고 한다. 만약 $\{A_i\}$ 가 집합들의 한 수열이면, 첨수집합이 자연수 n^+ 일 때, 그 수열의 합집합은 다음과 같다.

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i \text{ 또는 } A_0 \cup \cdots \cup A_n.$$

만약 첨수집합이 ω 이면, 표기는 다음과 같다.

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \text{ 또는 } A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots.$$

수열의 교집합과 데카르트곱도 유사하게 나타난다.

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i, \quad A_0 \cap \ldots \cap A_n,$$
$$\prod_{i=0}^{n} A_i, \quad A_0 \times \cdots \times A_n,$$

그리고

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i, \quad A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots,$$
$$\prod_{i=0}^{\infty} A_i, \quad A_0 \times A_1 \times A_2 \times \cdots.$$

"수열" 이라는 단어는 수학에서 약간은 다른 뜻으로 쓰이는데, 그 개념보다는 표기법에 차이가 있다. 0 대신에 1 부터 시작되는 것이 가장 흔한 예이다. 즉, 이것은 ω 대신에 $\omega - \{0\}$ 을 첨수집합으로 갖는 집합족을 가리키는 것이다.

12 Peano의 공리

이제 우리는 조금 옆길로 새서 다른 이야기를 해보고자 한다. 이 이야기의 목적은 자연수의 산술이론과의 빠른 연결이다. 집합론의 관점에서 볼 때 이것은 중요하고 유쾌한 일이다.

모든 자연수의 집합인 ω에 대해, 우리가 알고 있는 것 중 가장 중요한 점은 ω가 모든 successor set의 부분집합이 되는 유일한 successor set이라는 것이다. ω가 successor set이라는 말이 의미하는 바는 다음과 같다.

(Ⅰ) $0 \in \omega$

(0은 공집합을 뜻한다.)

(Ⅱ) $n \in \omega$이면 $n^+ \in \omega$

(여기서 $n^+ = n \cup \{n\}$) ω의 최소한의 성질은 ω의 부분집합 S가 successor set 이라면 $S = \omega$라는 것이다. 좀 더 쉽게 말하자면

(Ⅲ) $S \subset \omega, 0 \in S$이고, $n \in S$일 때 항상 $n^+ \in S$라면, $S = \omega$.

위의 성질 (Ⅲ)은 수학적 귀납법의 원리로 알려져 있다. 우리는 이제 ω의 성질에 두 가지 성질을 더 추가할 것이다.

(Ⅳ) ω에 속하는 모든 n에 대하여 $n^+ \neq 0$.

(Ⅴ) n, m이 ω에 속하고 $n^+ = m^+$라면 $n = m$이다.

(Ⅳ)의 증명은 자명하다. n^+는 항상 n을 포함하고, 0은 비어있기 때문에 n^+와 공집합이 다르다는 것은 확실하다. (Ⅴ)의 증명은 명백하지 않다. (Ⅴ)의 증명은 몇 개의 보조 명제에 달려있다. 때첫번째 명제는 실제로 일어나지 않아야 할 것은 일어나지 않는다는 것을 주장한다. 이것의 증명 과정은 문제가 있고, 우리가 자연수 이론에서 보고자 했던 산술과는 거리가 멀기 때문에 살펴보지는 않겠지만, 그래도 목적은 수단을 정당화한다. 두번째 명제도 방금 넘어간 것과 매우 유사하다. 그러나 이번에 그 명백히 인위적인 고려들은 확정적인 결과로 끝난다. 다소 놀라운 일은 항상 발생한다는 것이다. 그 진술은 다음과 같다: (i) 어떠한 자연수도 그 수의 원소의 부분집합이 아니다. 장 (ii) 자연수의 모든 원소는 그 자연수의 부분집합이다. 이 명제들을 만족하는 집합을 때때로 transitive set 이라고 부른다. 좀 더 정확하게 말하자면 E가 이행성을 지닌다고 말하는 것은 $x \in y$이고, $y \in E$이면 $x \in E$라는 의미이다. (우리가 관계론에서 직면했던 미세하게 다른 단어사용을 기억하라.) 이 서술에서 (ii)는 모든 자연수는 이행성을 가진다는 사실을 말해준다.

(i)의 증명은 수학적 귀납법의 원리의 형식적인 적용이다. S를 자신의 원소에 포함되지 않는 모든 자연수 n의 집합이라 하자. ($n \in S \Leftrightarrow n \in \omega$이고, n은 n에 속하는 어떠한 x의 부분집합도 아니다.) 0은 그것의 원소의 어떠한 부분집합도 아니므로, $0 \in S$라 할 수 있다. 이제 $n \in S$라 가정해보자. n은 n의 부분집합이므로, 우리는 n이 n의 원소가 아니라고 추론할 것이다. 그러므로 n^+도 n의 부분집합이 아니다. n^+는 무엇의 부분집합이 될 수 있을까? $n^+ \subset x$라면 $n \subset x$이고, $n \in S$

이기 때문에 $x \in' n$ 이다. 이것으로 n^+ 는 n 의 부분집합이 될 수 없고 n^+ 는 n 의 어떤 원소의 부분집합도 될 수 없다. 이것은 n^+ 가 n^+ 의 어떤 원소의 부분집합도 될 수 없음을 의미하고 그러므로 $n^+ \in S$ 이다. 우리가 원하는 결론인 (i) 은 이제 (Ⅲ) 의 결과이다.

(ii) 의 증명 또한 귀납적이다. 이번에는 S 를 이행성을 지닌 모든 자연수의 집합이라 하자. ($n \in S \Leftrightarrow n \in \omega$ 이고, n 에 있는 모든 x 에 대하여 x 는 n 의 부분집합이다.) $0 \in S$ 라는 요건은 만족된다. 이제 $n \in S$ 라고 가정해보자. $x \in n^+$ 라면 $x \in n$ 또는 $x = n$ 이다. 첫번째 경우에서 $n \in S$ 이므로 $x \subset n$ 이고 따라서 $x \subset n^+$ 이다. 다두번째 경우에서는 좀더 자명한 이유들로 $x \subset n^+$ 이다. 이것은 n^+ 의 모든 원소가 n^+ 의 부분집합이라 말할 수 있게 한다. 다시 말하면 $n^+ \in S$ 라는 것이다. 우리가 원하는 결론인 (ii) 는 (Ⅲ) 의 결과이다.

이제 우리는 (Ⅴ) 를 증명할 준비가 되었다. n 과 m 은 자연수이고 $n^+ = m^+$ 라고 가정하여 보자. $n \in n^+$ 이기 때문에 이것은 $n \in m^+$ 라 할 수 있고, 그러므로 $n \in m$ 이거나 $n = m$ 이다. 이와 유사하게 하면 $m \in n$ 이거나 $m = n$ 이다. 만약 $n \neq m$ 이라면 $n \in m$ 이고 $m \in n$ 이어야 한다. (ii) 에 의해 n 은 이행성을 지니기 때문에 $n \in n$ 이라 할 수 있다. 그러나 $n \subset n$ 이기 때문에 이것은 (i) 에 모순된다. 증명은 이렇게 완성된다.

(Ⅰ) 에서 (Ⅴ) 까지의 주장들은 Peano axioms 이라고 알려져 있다. Peano axioms 은 모든 수학적 지식의 근원으로 여겨진다. (우리가 이미 다루었던 집합이론과 함께) 그것들로 정수, 유리수, 실수, 복소수를 정의할 수 있으며, 일반적인 산술과 해석적 명제들을 끌어낼 수 있다. 이 책에서는 그 과정을 다루지 않는다; 이것에 흥미 있는 독자들은 다른 곳에서 관련 서적을 찾아 공부하는 데에 어려움이 없을 것이다.

귀납법은 종종 어떠한 것을 증명할 때 뿐만이 아니라 어떠한 것을 정의할 때에도 이용된다. 구체적으로 예를 들면 f 가 집합 X 에서 같은 집합 X 로 가는 함수이고 a 는 X 의 원소라고 가정한다. X 의 원소들로 이루어진 무한한 순열 $\{u(n)\}$ 을 (ω 에서 X 로 가는 함수 u) $u(0) = a, u(1) = f(u(0)), u(2) = f(u(1))$, 등등 이런 식으로 정의하는 것은 자연스러워 보인다. 만약 위와 같이 정의를 하던 사람에게 "등등" 을 설명하라고 한다면 그는 아마도 귀납법에 근거하여, 우리가 $u(0)$ 을 a 로 정의했고, 귀납적 추리에 의해 모든 n 에 대하여 $u(n^+)$ 를 $f(u(n))$ 으로 정의하였으므로 정의에 필요한 모든 것이 갖춰졌다고 말할 것이다. 이것은 그럴듯해 보이지만 그것의 존재에 대한 주장이 정당하다고 규정하는 데에 불충분하다. 수학적 귀납법은 실제로 진술되는 모든 조건들을 만족하는 함수가 많아야 한 개 라는 것을 쉽게 증명하지만 그러한 함수의 존재성을 설정할 수는 없다. 우리에게 필요한 것은 다음의 결과이다.

정리 1 (귀납 정리) 만약 a 가 어떤 집합 X 의 원소이고 f 가 X 에서 X 로 가는 함

수라면, $u(0) = a$ 이고, ω 에 있는 모든 n 에 대하여 $u(n^+) = f(u(n))$ 를 만족하는 ω 에서 X 로 가는 함수 u 가 있다.

(증명) ω 에서 X 로 가는 함수는 $\omega \times X$ 의 한 부분집합이라는 점을 생각해보자; 그러면 u 를 순서쌍들이 모인 집합으로 설정할 수 있다. $(n, X) \in A$ 일 때마다 $(n^+, f(x)) \in A$ 이고 $(0, a) \in A$ 인 $\omega \times X$ 의 부분집합 A 들을 모두 모은 것을 $\mathcal{C}$ 이라고 하자. 그러면 $\omega \times X$ 가 원소들을 갖고 있기 때문에 $\mathcal{C}$ 는 공집합이 아니다. 그러므로 우리는 $\mathcal{C}$ 의 모든 집합들의 교집합 u 를 만들 수 있다. u 가 $\mathcal{C}$ 에 속해있다는 것은 쉽게 알 수 있기 때문에, 이제 우리는 u 가 함수라는 것만 증명하면 된다. 즉, 각각의 자연수 n 에 대하여 $(n, x) \in u$ 를 만족하는 X 의 원소 x 가 많아야 하나 존재한다는 것을 보이면 된다. (만약 (n, x) 와 (n, y) 가 모두 u 에 속해있다면 $x = y$ 라는 것은 명백하다.) 이 증명은 귀납적이다. S 를 많아야 한개의 x 에 대해서 $(n, x) \in u$ 가 참이 되는 모든 자연수 n 의 집합으로 두자. 우리는 $0 \in S$ 이고 만일 $n \in S$ 면 $n^+ \in S$ 임을 증명할 것이다.

0 은 S 에 속하는가? 만약 속하지 않는다면 a 와 구분되는 어떤 b 에 대해서 $(0, b) \in u$ 이 존재한다. 이러한 경우에 집합 $u - \{(0, b)\}$ 를 생각해보자. 의작아진 이 집합은 여전히 ($a \neq b$ 이기 때문에) $(0, a)$ 를 원소로 갖고 있으며, 그 집합에 (n, x) 가 있다면, $(n^+, f(x))$ 도 있을 것이다. 두번째 주장에 대해서는 $n^+ \neq 0$ 이기 때문에 버려진 원소는 $(n^+, f(x))$ 와 같지 않다는 것을 근거로 들 수 있다. 따라서 $u - \{(0, b)\} \in \mathcal{C}$ 이다. 이것은 u 가 $\mathcal{C}$ 에서 가장 작은 집합이라는 것과 모순되기 때문에 우리는 $0 \in S$ 라고 결론을 내릴 수 있다.

이제 $n \in u$ 라고 가정해보자; 이것은 X 에 속하는 $(n, x) \in u$ 인 원소 x 가 유일하다는 것을 의미한다. $(n, x) \in u$ 이므로 $(n^+, f(x)) \in u$ 이다. 만약 n^+ 가 S 에 속해있지 않는다면, $f(x)$ 와 다른 어떤 y 에 대하여 $(n^+, y) \in u$ 일 것이다. 이러한 경우에 집합 $u - \{(n^+, y)\}$ 를 생각해보자. 이 작아진 집합은 $(0, a)$ 를 갖고 ($n^+ \neq 0$ 이기 때문에), 만약 그 집합이 (m, t) 를 포함한다면, $(m^+, f(x))$ 도 그 집합에 있을 것이다. 실제로 만약 $m = n$ 이라면 t 는 x 이고, $f(x) \neq y$ 이기 때문에 작아진 집합이 $(n^+, f(x))$ 를 갖게 되는 것이다; 반면에 만약 $m \neq n$ 이라면, $m^+ \neq n^+$ 이기 때문에 역시 $(m^+, f(x))$ 를 갖게 된다. 즉, $u - \{(n^+, y)\} \in \mathcal{C}$ 이다. 이것은 다시 u 가 $\mathcal{C}$ 의 가장 작은 집합이라는 것과 모순되고, 따라서 우리는 $n^+ \in S$ 라는 결론을 낼 수 있다.

귀납 이론의 증명이 끝났다. 귀납 이론을 적용한 것을 귀납법에 의한 정의라고 부른다.

[연습문제] n 이 자연수라면 $n \neq n^+$ 이고; $n \neq 0$ 이면 어떤 자연수 m 에 대하여 $n = m^+$ 라는 것을 증명하여라. ω 가 추이성을 갖는다는 것을 증명하여라. E 가 어떤 자연수의 공집합이 아닌 부분집합이라면 k 와 다른 m 이 E 의 원소일 때 $k \in m$ 인 원소 k 가 집합 E 에 존재한다는 것을 증명

하여라.

13 Arithmetic(산술)

자연수의 덧셈에 관한 도입은 귀납법에서 비롯된 정의의 일반적 예이다. 실제로, 그것은 각각의 자연수 m 에 대하여 어떤 함수 s_m 이 ω 에서 ω 까지 모든 자연수 n 에 대하여 $s_m(0) = m$ 와 $s_m(n^+) = (s_m(n))^+$ 이 존재한다는 귀납적 이론에서 비롯된 것이다. 이 때 정의에 따라 $s_m(n)$ 은 합(合) $m + n$ 이라고 한다. 일반적인 정수론에서의 합의 성질은 수학적 귀납법 이론의 반복적인 적용에 의해 증명된다. 예를 들면, 합은 결합법칙이 성립한다. 즉, k, m, n 이 자연수 일 때, 다음이 성립한다.

$$(k + m) + n = k + (m + n).$$

그 증명은 다음에 나오는 n 에 대한 수학적 귀납법에 의해 이루어진다. $(k + m) + 0 = k + m$ 이고, $k + (m + 0) = k + m$ 이면, n 이 0 이 될 때, 이 방정식은 참이 된다. 만약, 어떤 n 에 대해 이 방정식이 참이라면,

$$\begin{aligned}
(k+m)+n^+ &= ((k+m)+n)^+ && \text{(정의에 의해)}\\
&= (k+(m+n))^+ && \text{(앞의 가정에서)}\\
&= k+(m+n)^+ && \text{(역시, 합의 정의에서)}\\
&= k+(m+n^+) && \text{(앞과 동일)}
\end{aligned}$$

이다. 따라서 증명이 완성된다. 덧셈에 관한 교환법칙 (예를 들어, $m+n = n+m$) 을 증명하는 것은 쉬운 문제가 아니다. (일반적으로 증명을 하듯이 하게 되면 어려움에 부딪히게 될 것이다.) 그 증명은 n 에서 (귀납법) (i) $0+n = n$, (ii) $m^+ + n = (m + n)^+$ 일 때, m 에서 (i) 과 (ii) 를 이용하여 교환법칙이 성립함을 보이면 된다.

이러한 유사한 방법은 곱과 지수, 미분에 대한 기본적인 성질에 대한 정의를 증명할 때도 이용된다. 곱셈을 정의하기 위해, 수학적 귀납법 이론을 적용시켜, 모든 자연수 n 에 대하여 $p_m(0) = 0$ 와 $p_m(n^+) = p_m(n) + m$ 를 만족시키는 함수 p_m 이 있다고 하자. 그렇다면, 정의에 의해 $p_m(n)$ 의 값은 곱 $m \cdot n$ 이다.(중간의 점은 자주 생략된다) 곱셈 역시 결합법칙과 교환법칙이 성립하는데 그 증명은 덧셈에서의 법칙들을 증명할 때 쓰였던 것을 그대로 사용한 것이다. k, m, n 이 자연수라면 $k \cdot (m+n) = k \cdot m + k \cdot n$ 이 항상 성립함을 의미하는 분배법칙은 수학적 귀납법 이론으로 쉽게 도출해낼 수 있는 결과이다. 누구든 합과 곱을 이러한 방식으로 해왔다면 지수의 계산에 관해서도 어렵지 않게 해낼 수 있을 것이다. 귀납적 이론에서, 모든 자연수 n 에 대하여 $e_m(n^+) = e_m(n) \cdot n$ 과 $e_m(0) = 1$ 을 만족하는 곱의 함수 e_m 이 있다고 할 때, 정의에 의해서 $e_m(n)$ 의 값은 거듭제곱 m^n 이라고 한다. 자세한 곱셈 증명에 대한 서술과 마찬가지로, 거듭제곱에 관해 성립하는 성질에 대한 발견과 업적들은 독자를 위해 연습문제로 남겨둔다.

다음으로 관심을 가져야 할 주제는 자연수의 순서에 관한 이론이다. 이를 위해 어떤 자연수가 다른 어떤 자연수에 속하게 되는 문제에 관심을 가지고 시작해보자. m, n 이 자연수일때, 만약 $m \in n$ 이거나 $m = n$ 이거나, $n \in m$ 이면, 명백하게 2개의 자연수는 비교가 가능하다고 말할 수 있다. 그럼, 여기서 2 개의 자연수는 항상 비교가 가능하다는 것을 증명해보자. 이 증명은 몇 단계를 거쳐야 한다. 따라서 편의를 위해 몇 가지의 노테이션(기호법)을 소개한다. ω 에 속해있는 각각의 n 에서, n 과 비교가능한 ω 에 속한 m 에 관한 모든 집합을 $S(n)$ 이라고 한다. 또 $S(n) = \omega$ 을 만족하는 모든 n 들의 집합들을 S 라고 둔다. 따라서 위의 이론은 $S = \omega$ 라고 쓸수 있다. 이제 이 증명을 $S(0) = \omega$ 라는 것을 보여주면 시작해보자(즉, $0 \in S$ 이다) 명백히 $S(0)$ 는 0 를 포함한다. 만약, $m \in S(0)$ 라면, $m \in 0$ 인 것은 불가능하므로, $m = 0$(즉, $0 \in m^+$ 인 경우) 이거나, $0 \in m$(역시 $0 \in m^+$ 인 경우) 이다. 따라서 모든 경우에, $m \in S(0)$ 라면, $m^+ \in S(0)$ 이다. 여기서, $S(0) = \omega$ 인 것 또한 증명된다. 계속해서, 만약 $S(n) = \omega$ 일때, $S(n^+) = \omega$ 것을 보이면, 증명은 끝난다. 그런데 $n^+ \in S(0)$ 에서 $0 \in S(0)$ 인 사실은 직관적으로 알수 있지만, 여전히 $m \in S(n^+)$ 이면, $m^+ \in S(n^+)$ 이라는 사실을 증명해야한다. 여기서 $m \in S(n^+)$ 이므로, $n^+ \in m(n^+ \in m^+$ 에서) 이거나, $n^+ = m$ 이거나, $m \in n^+$ 이다. 후자의 것은 $m = n(m^+ = n^+$ 의 경우에서) 이거나 $m \in n$ 이다. 다음으로 마지막 것은 $m^+ \in S(n)$ 에서 m^+ 과 n 의 성질에 따라서 도출된다. $m^+ \in S(n)$ 에서 반드시 $n \in m^+$ 이거나 $n = m^+$ 이거나 $m^+ \in n$ 이어야 한다. 첫 번째의 경우는 현재의 상황에서 비교가 불가능하다(즉, $m \in n$ 에서). 왜냐하면, 만약에 $n \in m^+$ 이면 $n \subset m$ 이기 위해서, 어떤 경우라도 $n \in m$ 이거나, $n = m$ 이어야 한다. 하지만, 어떤 자연수의 경우도 그 원소 중의 하나의 부분집합이 될 수 없다. 나머지 두가지의 경우는 $m^+ \in n^+$ 의 의미를 함축하고 있으므로, 증명은 끝난다.

다시말해서 위의 문단은, m 과 n 이 ω 에 있을때, 적어도 3 가지의 가능성 ($m \in n, m = n, n \in m$) 중에 한가지를 만족한다는 의미를 포함한다. 이것을 보이는 것은 매우 쉽다.(그 이유는 자연수는 하나의 원소로 이루어진 그것들의 부분집합이 아니라는 사실의 또 다른 적용때문이다.) 위의 문단에서 또 다른 결론은 만약에 m 과 n 이 구분될 수 있는 자연수라면, $m \in n$ 을 위한 필요충분조건은 $m \in n$ 이다.

확실히, $m \in n$ 로부터 $m \subset n$ 이 유도된다는 것은 단지 n 의 이 transitive 한가에 달려있다. 그와 반대로 만약 $m \subset n$ 이고 $m \neq n$ 이며 $n \in m$ 일 경우는 (단, 그때 m 은 그 자신의 원소의 부분집합 중 하나이다) 일어날수 없으며 따라서 $m \in n$ 이 성립한다. 만약 $m \in n$ 이거나 (그와 동치인) m 이 n 의 진부분집합일 경우, 우리는 이를 $m < n$ 이라고 쓸 수 있으며 m 이 n 보다 작다고 말할 수 있다. 만약 m 이 n 보다 작거나 그와 같다고 알려져 있다면, 우리는 이를 $m \leq n$ 이라고 쓸 수 있다. $\leq$ 와 $<$ 은 ω 안의 관계들이다. 전자는 reflexive 하지만 후자는 그렇지않다. 또한 둘다 symmertric 하지는 않지만 둘다 transitive 하다. 만약 $m \leq n$ 그리고 $n \leq m$ 이면 $m = n$ 을 만족한다.

[연습문제] 만약 $m < n$일 때 $m + k < n + k$ 임을 만족하고, 만약 $m < n$이고 $k \neq 0$ 일때 $mk < nk$가 만족함을 증명하라. 만약 E가 자연수에 대해 공집합이 아니라면, 그 때 E의 모든 m에 대하여 $k \leq m$을 만족하는 k가 m에 존재함을 증명하라.

만약 두 집합 E와 $F(\omega$의 부분집합일 필요는 없다) 사이에 1 대 1 대응관계가 있으면 동치라고 부르고 $E \sim F$로 나타낸다. 특정한 집합 X의 부분집합들에 대하여 이러한 의미의 동치 개념이 멱집합 $\mathcal{P}(X)$ 안에서 동치관계가 된다는 것을 증명하는 것은 쉽다.

모든 자연수 n의 진부분집합은 그보다 작은 자연수와 동치이다 (예를 들어, n의 어떤 원소). 이 주장은 귀납적으로 증명할 수 있다. $n = 0$인 경우에, 이는 명백하다. 만약 명제가 n일 때 성립하고 E가 n^+의 진 부분집합이면 E가 n의 진부분집합이면서 귀납법이 적용되거나, $E = n$이어서 결과가 단순하거나 $n \in E$이다. 마지막 경우는 E에는 속하지 않으나 n에는 속하는 수 k를 찾고, 집합 E에 함수 f를 적용하면 $i \neq n$이고 $f(n) = k$ 일 때 $f(i) = i$가 성립하는 함수 f를 E 위에 정의한다. f는 명백히 일대일 대응이며 E로부터 n으로의 함수이다. 이때 함수 f 하에 있는 집합 E가 n과 동일하거나 또는 n의 어떤 원소와 동치이므로 (가정에 의해서), 결론적으로 집합 E는 이 자신이 집합n^+의 어떤 원소와 항상 동치이다.

하나의 집합이 그 자신의 진부분집합과 동치일 수 있다는 사실은 다소 충격적이다. 예를 들어서 만약 ω에서 ω로 가는 함수 f가 ω에 있는 모든 n에 대하여 $f(n) = n^+$이면, f는 모든 자연수의 집합과 0이 아닌 자연수의 집합 사이에서 일대일 대응이다. 모든 자연수의 집합이 이 이상한 속성을 가지고 있음에도 불구하고, 정상적인 것들이 이 각각의 자연수에 적용된다는 것은 멋진 사실이다. 다시 말해, 만약 $n \in \omega$라면 n은 그 자신의 진분집합과 동치일 수 없다. 만약 $n = 0$인 경우에, 이는 명백하다. n일 때 앞의 명제가 성립한다고 가정하고, 함수 n^+부터 n^+의 부분집합으로 향하는 함수 f를 가정하자. 만약 $n \in {}'E$이라면 함수 f에 의하여 n은 n과 그의 진부분집합 사이에 일대일대응 관계가 존재해야 하지만, 이는 가정에 대한 모순이다. 만약 $n \in E$라면 n은 $E - \{n\}$과 동치이고, 가정에 의해서, $n = E - \{n\}$이 성립한다. 이는 $E = n^+$ 임을 암시하는 것이고, 이는 E가 n^+의 진부분집합이라는 가정에 모순이다.

한 집합 E가 어떤 자연수와 동치라면 이는 유한집합이지만 그렇지 않으면 집합 E는 무한집합이다.

[연습문제] 정의를 사용해서 ω가 무한집합임을 보여라.

한 집합은 기껏해야 하나의 자연수와 동치일 수 있다. (증명 : 우리는 서로 다른 두 자연수에 대해 하나는 반드시 원소가 되므로 나머지 하나의 진부분집합이 됨을 안다. 이는 앞서 언급한 '그 둘은 동치일 수 없다'는 단락 에 따른다.) 우리는 유한집합은 그의 진부분집합과 동치일 수 없다는 사실을 추론할 수 있을지도 모른다.

다시말해, 우리가 유한집합만을 한정할 때, 전체는 항상 그의 어떤 부분보다도 크다.

[연습문제] ω가 무한집합임을 증명하기 위해 이 유한성의 정의의 결론을 사용하라.

모든 자연수의 부분집합은 자연수와 동치이기 때문에 모든 유한집합의 부분집합은 유한하다.

유한집합에서의 집합 E의 원소의 수는 정의에 의해 집합 E와 동치인 특정한 자연수이다. 우리는 이를 $\sharp(E)$로 나타낼 수 있다. 만약 E와 $\sharp(E)$가 일치한다면, 이 사실은 어떤 집합 X의 유한한 부분집합에 의해 멱집합의 한 부분집합으로부터 ω 사이의 함수가 도출된다는 결론을 이끌어 낸다. 이 함수는 익숙한 집합 이론들과 연산들에 적절하게 관계한다. 그러므로, 예들 들어 E와 F가 유한집합이고 그 결과 $E \subset F$이면 $\sharp(E) \leq \sharp(F)$이다. ($\because$ $E \sim \sharp(E)$가 성립하고, $F \sim \sharp(F)$가 성립하므로 $\sharp(E)$는 $\sharp(F)$의 부분집합 이다.) 다른 예는 만약 E와 F가 유한집합이라면 $E \cup F$는 유한하고 더 나아가서 E와 F가 교집합이 존재하지 않다면, $\sharp(E \cup F) = \sharp(E) + \sharp(F)$가 성립한다는 것이다. 증명을 하기위한 결정적인 단계는 m과 n이 자연수라면 합의 연산 $m + n$에서 m의 여수(餘數)는 n과 동치라는 사실이다. 이 보조적인 사실의 증명은 n의 유도로 얻어질 수 있다. 비슷한 기법(technique)은 다음과 같은 사실도 증명한다. 만약 E와 F가 유한집합이라면, $E \times F$와 E^F에 대해서 $\sharp(E \times F) = \sharp(E)\sharp(F)$ 그리고 $\sharp(E^F) = \sharp(E)^{\sharp(F)}$가 성립한다.

[연습문제] 유한집합과 유한집합의 합집합은 유한하다. 만약 E가 유한하다면 E의 $P(E)$은 유한하고 $\sharp(p(E)) = 2^{\sharp(E)}$이다. 만약 자연수들에 대해 E가 공집합이 아니라면, E안의 모든 m에 대해 $m \leq k$가 성립하는 어떤 원소 k가 존재한다.

14 순서에 관한 고찰 (Order)

수학에서 특히 무한 집합에서 유한 집합을 이용하여 숫자를 세는 과정을 일반화 할 때, 순서의 정리는 중요한 역할을 한다. 기본적인 정의는 간단하다. 첫 번째 항의 유도는 친숙한 성질인 "보다 작다 혹은 같다" 그리고 "작지 않다" 에서 나왔다는 사실만을 기억하면 된다. 이것에 대하여 난해할 이유는 없다; 거기에는 "보다 작다 혹은 같다" 의 일반론이 대수적 방법보다 더 다루기 쉽고, 자주 발생하기 때문이다.

집합 x 에서 R 과의 관계는 antisymmetric(기함수) 이라 불린다. 모든 x, y 가 X 에 있을 때, 만약 xRy 와 yRx 의 동시에 존재하는 유효 값은 $x = y$ 를 의미한다. 집합 X 에서의 부분 순서 (혹은 때때로 단순한 순서) 는 X 와의 관계 속에서 다시 돌아오고, 기함수의 성질을 갖고 치환가능하다. 대부분의 집합에 부분적인 순서는 하나만 나타내는 것이 관용적 표현이다. 보통 사용하는 기호는 익숙한 부등식 기호이다. 그러므로 X 에서 일부분의 순서는 모든 x, y, z 가 있는 X 에서의 관계 $\leq$ 으로 정의 될 것이다. 그러므로 X 에서의 부분의 순서는 아마 모든 x, y, z 가 있는 X 에서의 기호 $\leq$ 의 관계로서 정의되어지고 있다. 우리는 (i) $x \leq x$, (ii) 만약 $x \leq y$ 그리고 $y \leq x$ 면, $x = y$ 이다. (iii) 그리고 만약 $x \leq y$ 이고 $y \leq z$ 이면 $x \leq z$ 이다. "부분 순서" 가 가치가 있게 평가되는 이유는 답해지지 않은 채로 남아있는 순서에 대한 의문 때문이다. 만약 X 에 있는 모든 x, y 가 $x \leq y$ 혹은 $y \leq x$ 이면, $\leq$ 는 전체 (혹은 간단한 혹은 선형화한으로 종종 불린다) 순서이다. 전체적으로 순서화된 집합은 종종 chain 이라고 부른다.

예제) R 과 R 의 역수를 포함하는 식의 수단으로서의 R 에 대한 전체성과 기함수의 조건에 대하여 서술하시오.

가장 쉬운 부분의 순서의 예는 포함이다. 각각의 집합 X 그리고 포함관계는 멱집합 $P(x)$ 의 부분의 순서이다. 다시 말해 전체의 순서는 X 가 공집합이거나 혹은 X 가 독자적인 것과 필요충분조건이다. 잘 알려진 전체 순서 나열의 예는 자연수의 집합 내에서 "적거나 혹은 같은" 관계이다. 흥미롭고 빈번하게 보이는 부분적 순서나열은 함수의 확장에 관련된 관계이다. 외형적 : 주어진 집합 X, Y 에 대하여 F 를 정의역이 X 에 포함되고 공역이 Y 에 포함되는 모든 함수의 집합이라 하자. R 과 F 의 관계를 정의역 f 가 정의역 g 안에 포함되고 모든 정의역 x 에 대해서 $f(x) = g(x)$ 일 때 fRg 라 표현하자. 달리 표현하면 fRg 는 f 가 g 를 제한하고 있다, 혹은 상치되는 의미로, g 가 f 의 확장형이라고 표현할 수 있다. 만일 우리가 함수 F 가 Cartesian product(데카르트 곱) $X \times Y$ 의 부분집합임을 상기한다면, 우리는 fRg 가 $f \subset g$ 와 같은 의미라는 것을 깨달을 수 있다: 확장은 포함의 특별한 경우이다.

부분적으로 배열된 집합은 부분적인 순서가 그 안에 함께 있는 집합이다. "togetherness(함께함)" 에 대한 정확한 공식은 뒤의 내용을 따른다.: 하나의 부분적으로 배열된 집합은 배열된 쌍 $(X, \leq)$ 이다. 만일 X 가 집합이라면 $\leq$ 는 부분적으로

X 에 대해서 배열되어 있다. 이와 같은 정의는 매우 수학에서 매우 일반적인 것이다; 수학적인 구조는 거의 대부분 어떤 특정한 집합이나, 함수나, 관계에서 "함께" 하는 집합이기 때문이다. 이와 같은 정량적인 정의를 만드는데 수락되어진 방법은 쌍, 세 쌍, 혹은 무엇이든 적절한 것을 배열하는 것에 대한 안내이다. 그것만이 유일한 방법은 아니다. 예를 들어서 부분적 배열의 지식에 대한 관찰은 부분적 배열의 정의역에 대한 지식을 내포한다. 그러므로 만일 우리가 부분적으로 배열된 집합을 마치 순서쌍으로 표시한다고 하면 우리는 확실히 말이 장황해짐을 알 수 있다; 두 번째 표현으로도 같은 양의 정보를 제공해줄 것이다. 하지만 언어와 표현법의 문제에서는 전통이 항상 순수 이유를 상회한다. 받아들여진 수학적 행위는 (일반적인 구조에서, 여기서는 부분적으로 배열된 집합으로 묘사된다.) 순서쌍이 항상 옳은 접근임을 인정하기 위함이고, 두 번째 표현이 중요하다는 것을 잊기 위함이며, 첫 번째 표현이 모든 것에 들어맞는 것처럼 말하기 위함이다. 관습을 따르면, 우리는 종종 "X를 부분적으로 순서가 배열된 집합이라 하자" 라고 말할 것이다. 같은 언어적 관습은 완전히 배열된 집합은 전체적으로 순서화 된 집합 즉, 전체 사실에 대해 부분적으로 순서화 된 집합에 적용된다.

그들이 자체적으로 표현될 수 있는 언어와 단어들로 기술 된다. 구체적으로 X 가 부분적으로 배열된 집합이고 x와 y가 X 의 원소라고 가정하여보라. 우리는 $x \le y$ 인 경우에 $y \ge$ 라고 쓸 것이다; 다른 말로 하자면 $\ge$ 은 $\le$ 의 역의 관계이다. 만일 $x \le y$ 이고 $x \ne y$ 이면, 우리는 $x < y$ 라고 쓸 것이 며, x가 y 보다 작거나 부족하다 혹은 x가 y 의 전에 있는 값이라고 말할 것이다. 같은 상황에서, 대안으로는, 우리는 $y > x$ 그리고 우리는 y가 x보다 크거나 거대하다 혹은 y가 x 의 뒤에 있는 값이라고 말할 것이다. 관계 $<$ 는 (ⅰ) 에 대하여 $x < y$ 이면서 $y < x$ 를 만족하는 원소 x, y 는 없음을 나 타내고 동시에 (ⅱ) $x < y$ 이고 $y < z$ 이면 $x < z$ 임을 나타낸다. (따라서 $<$ 는 전이가능하다). 반대로 만약 $<$ 이 (ⅰ) (ⅱ) 을 만족하는 X 의 관계라면, 그리고 $x \le y$ 가 $x < y$ 또는 $x = y$ 의 의미로 적용 된다면 $\le$ 는 X 의 부분 순서이다.

$\le$ 과 $<$ 사이의 관계는 임의의 관계로 일반화 될 수 있다. 즉 주어진 어떤 X 의 집합 R 의 관계에서, 우리는 xSy 라고 표현한 X 안의 관계 S 를 , xRy 이나 $x \ne y$ 인 경우에 정의할 수 있고, 역으로, 우리는 xRy 라고 표현한 X 안의 관계 R 을 , xSy 이나 $x = y$ 인 경우에 정의할 수 있다. R 에서 S 혹은 그 반대 문구에 관한 언급을 간략화 하기 위해서, 우리는 S 가 R 에 일치하는 강력한 관계라고 말하고, R 은 S 에 일치하는 약한 관계라고 말한다. 우리는 집합 X 에 들어가는 관계를, X 안에 부분순서를 갖거나 약한 관계를 갖는 것과 일치하는 경우에, "부분적으로 배열된 X" 라고 말한다.

만일 X 가 부분적으로 배열된 집합이고 $a \in X$ 이면, 집합 $\{x \in X : x < a\}$ 는 a 에 관하여 결정 되는 개구간 (시초 구간) 이다; 우리는 그것을 종종 $s(a)$ 라고 나타낸다. 그 집합 $\{x \in X : x < a\}$ 는 a 에 대해서 결정되는 폐구간 (약한 시초

구간) 이고, $\bar{s}(a)$ 라고 표현한다. 개구간과 폐구간을 강조하는 것이 중요한 문제가 될때 전자가 강력한 시초 구간 이라고 불려지게 된다. 일반적인 단어인 "강력함" 과 "약함" 은 $<$ 과 $\leq$ 과 상대적으로 언급된 다. 이에 따라 예를 들면 그 시초 구간은 a 의 모든 이전구간의 집합, 강조하자면 강력한 이전구간 a 의 모든 집합으로 묘사될 a 로 결정될 것이다; 비슷한 경우로 그 약한 시초구간은 모든 약한 이전구간으로 이루어진 a 에 의해 결정될 것이다. 만일 $x \leq y$ 이고 $y \leq z$ 우리는 y 가 x 와 z 의 사이에 있다고 말할 것이다; 만일 $x < y$ 이고 $y < z$ 이면 우리는 엄격히 y 가 x 와 z 의 사이에 있다고 말할 것이다. 만일 $x < y$ 이고 x 와 y 사이에 엄격하게 아무런 원소도 존재 하지 않는다면 x 는 y 의 바로 직전 전임수라고 말하거나 y 는 x 의 바로 다음 후임수라고 말한다.

만일 X 가 부분적으로 배열된 집합 (특별하게 전체적으로 배열된) 이라면 X 는 모든 x 에 대하 여 $a \leq x$ 인 어떤 원소 a 가 존재할 수도 있다. 그런 경우에 우리는 a 가 X 의 최소의 (가장 작은, 최초의) 원소라고 부른다. 비슷한 경우로, 만일 X 가 모든 x 에 대하여 $x \leq a$ 인 어떤 원소 a 가 존재한다면, a 는 X 의 최대의 (가장 큰, 마지막) 원소라고 부른다; 그것은 모두 유 일하다 (만약 그것들이 존재한다면). 자연수로 이루어진 집합 w 는 (크기에 따른 관습적 배열로 된) 최초의 원소 (0 이라고 불리우는) 를 지니고 있지만 마지막은 없는 부분적으로 배 열된 집합의 한 예이다. 같은 집합, 그러나 이번엔 역으로 배열된, 은 마지막 원소는 있지만 최초의 원소는 없는 집합니다.

부분적으로 배열된 집합에서 최소의 (least) 원소와 가장 작은 (minimal) 원소와는 중요한 차이가 있다. 만일 , 전처럼, X 가 부분적으로 배열된 집합이라면, X 의 원소 a 는 a 보다 엄격 하게 작은 원소가 X 안에 없을때, 가장작은 X 의 원소라고 불리운다. 동일하게 , a 는 $x = a$ 을 포함한 $x \leq a$ 일때도 역시 가장 작다고 불리운다.

그 예로 , 공집합이 아닌 X 의 부분집합에 공집합이 아닌 C 의 모임을 포함에 의해 순서화 하는 것을 고려해 보자. 각각의 singleton(원소를 하나만 가지고 있는 집합) 은 C 의 가장 작은 원소이다. 그러나 명백히 C 는 가장 작은 원소를 가지고 있지 않다.(비록 X 자신이 singletion(원소를 하나만 가지고 있는 집합) 이지만). 우리는 가장 큰 (greatest) 와가장 큰 (maximal) 사이를 유사하게 구별할 수 있다.; X 의 가장 큰 (maximal) 원소 a 즉, X 에는 엄밀하게 a 보다 큰 원소는 없다. 동등하게, 만약 $a \leq x$ 일때, $x = a$ 를 의미 할 때 a 가 가장 큰 원소이다.

모든 x 가 E 에 있고 $a \leq x$ 일때, 부분집합의 한 원소 a 는 X 의 부분 집합 E 의 가장 작은 범위 (lower bound) 라고 불린다.; 유사하게 모든 x 가 E 에 있고, $x \leq a$ 일때, 부분집합의 한 원소 a 는 X 의 부분집합 E 의 가장 큰 범위 (upperbound) 라고 불린다. 집합 E 는 전체적으로 가장 작은 범위 (lower bound) 혹은 가장 큰 범위 (upper bound) 를 가지지 않거나, 혹은 아주 많이 갖을 것이다.; 후자의 경우는 E 와 아무런 관계가 없을 때 가능하다. (예제 ?) E_* 을 X 에 있는 E 의 가장 작은

범위 (lower bound) 의 집합으로 놓고, E^* 을 X 에 있는 E 의 가장 큰 범위 (upper bound) 라고 놓아라. 말하고자 했던 것은 E_* 이 공집합이거나, 혹은 $E_* \cap$ E 가 공집합이라는 것이다. 만약 $E_* \cap E$ 가 공집합이 아니면, 유일한 가장작은 E 에 있는 원소로 이루어진 singleton(원소를 하나만 가지고 있는 집합) 이다. 물론 유사하게 E^* 에도 확실히 적용 된다. 만약 집합 E_* 이 가장 큰 원소 a(당연히 유일하다) 를 포함하는 일이 일어난다면, a 는 E 의 great lower bound 혹은 infimum 이라고 불릴 것이다. 보통 g.l.b 그리고 inf 라고 줄여쓴다. 앞에 것은 발음하기 힘들고, 또한 g.l.b 가 위 (가장 큰) 혹은 아래 (가장 낮은) 기억하기 힘들기 때문에 우리는 inf 만을 사용할 것이다. 그리므로 dom E 는 X 에 있는 E 에 가장 작은 범위 (lower bound) 이고, 모든 다른 E 의 가장 작은 범위 (lower bound) 를 지배하는 (즉, 다른 원소보다 큰) 유일한 원소이다 (가능하다면 E 에 들어 있지 않은). 다른 방법으로 정의도 완벽하게 같다. 만약 E^* 가 가장 작은 원소 a(유일하는 것이 필요하다) 가지고 있다면, a 는 E 의 least uppper bound(l.u.b) 혹은 supremum(sup) 이라고 불린다.

부분 순서의 집합과 관계되어 있는 생각은 표현하기는 쉽지만, 그들은 때때로 유사하다. 독자들에게 부분 순서의 집합과 그들의 부분 집합에서 일어날 수 있는 다양한 경우를 설명할 수 있는 예를 만들어 볼 것을 충고한다. 우리는 이 계획에서 그를 돕기 위해, 몇 가지 놀라운 성질을 사용하여 3 가지 특별한 부분순서의 집합에 대해 설명 할 것이다. (i) 집합 $w \times w$ 이다. 여러 혼란을 피하기 위해 우리는 실수 기호 R 을 사용하여 순서를 나타낼 것이다. 만약 (a, b) 와 (x, y) 가 실수로 구성되어진 순서의 쌍이라고 하면, $(a, b)R(x, y)$ 는 정의에 의해 $(2a + 1)2^y \leq (2x + 1)2^b$ 이다. (여기에 부등호 기호는 습관적으로 실수에 대해 순서화 하는 것을 의미한다.) 분수에 대해 무지하다고 생각되어지지 않는 독자는 우리가 정의한 것은 $\frac{(2a+1)}{(2^b)}$ 과 $\frac{2x+1}{2^y}$ 의 일반적인 순서로 나타내어질 것이다. (ii) 다시 집합은 $w \times w$ 이다. 한번 더 많이 순서에 대해 실수 기호를 사용하면 S 라는 기호를 사용하자. 만약 (a, b) 그리고 (x, y) 실수의 순서 쌍이면, 정의에 의해 $(a, b)S(x, y)$ 는 무조건 x 보다 작은 (보통의 의미) 혹은 $a = x$ 그리고 $b \leq y$ 이다. 사용하는 방법의 유사성 때문에 단어는 사전식으로 배열있고, $w \times w$ 의 lexicographical 순서라고 불린다. (iii) 다시 한번 $w \times w$ 집합을 사용하자. T 라고 불리는 제시된 순서의 관계는 $(a, b)T(x, y)$ 정의에 따라 $a \leq x$ 그리고 $b \leq y$ 를 의미한다.

15 선택공리

부분적으로 순서가 매겨진 집합 (partially ordered set) 에 대한 가장 심오한 결과를 얻기 위해, 집합이론에 대한 새로운 도구가 필요하다; 이를 위해 (새로운 도구를 얻기 위해) 순서를 매기는 것 (index) 에 대한 이론의 발전을 조금 멈추어 두도록 하자.

우리는 어떤 집합이 공집합인지 공집합이 아닌지를 관찰하는 데에서부터 시작하겠다. 만약, 집합이 공집합이 아니라면 공집합의 정의에 의해, 그 집합에는 원소가 있다는 점을 상기하자. 이러한 주의사항을 일반화 시키면 다음과 같다. 만일 X 와 Y 가 집합들이고, 그들 중 하나가 공집합이라면, 카르테시안 곱 $X \times Y$ 는 공집합이다. 만일 X 도 Y 도 공집합이 아니라면, X 에 어떤 원소 x 가 있고, Y 에 어떤 원소 y 가 있다. 순서쌍 (x, y) 는 카르테시안 곱 $X \times Y$ 에 포함되며, 따라서 $X \times Y$ 는 공집합이 아니다. 앞서의 주의사항들은 다음 주장 (assertion) 에서 $n = 1$ 인 경우와 $n = 2$ 인 경우를 형성한다.: 만일 n 에 속한 i 에 대해 $\{x_i\}$ 가 유한 수열의 집합들이라면, 그들의 카르테시안 곱이 공집합일 필요충분조건은 그들 중 적어도 하나는 공집합이어야 한는 것이다. 이러한 주장은 n 에 기반한 귀납법으로 쉽게 증명할 수 있다. ($n = 0$ 인 경우는 공함수 (empty function : 정의역이 공집합인 함수) 에 대한 애매한 논증 (argument) 을 낳는다.; 흥미가 느껴지지 않는다면 귀납법을 0 대신 1 부터 시작해도 좋을 것이다.)

앞서의 문장 (필요조건) 에 있는 주장의 중요한 부분을 무한족으로 일반화하는 것은 집합이론에 있어 중요한 다음 원리다.

공리 [선택공리] 공집합이 아닌 집합들 (멱 non-empty sets) 의 공집합이 아닌 집합족 (non-empty family) 의 카르테시안 곱은 공집합이 아니다.

다른 말로 하자면 만일 $\{x_i\}$ 가 공집합이 아닌 집합들의 족 (family) 이고, 공집합이 아닌 집합 I 에 의해 indes 된다면, I 의 각각의 i 에 대하여 $x_i \in X_i$ 를 만족하는 $i \in I$ 에 대한 족 $\{x_i\}$

$\mathcal{C}$ 가 공집합이 아닌 집합들의 공집합이 아닌 모임 (non-empty collection) 이라고 가정해 보자. 우리는 $\mathcal{C}$ 를 족 (family) 라고 간주할 수 있다. 혹은, 좀 더 정확히 이야기 하자면, 우리는 $\mathcal{C}$ 모임 자신을 index 집합의 역할에 활용함으로써, 그리고 $\mathcal{C}$ 에 사상 (혹은 대응 mapping) 되는 항등함수 (identity) 를 순서를 매기는데 사용함으로써 $\mathcal{C}$ 를 순서 매겨진 집합으로 바꿀 수 있다. 그렇다면 우리는 $\mathcal{C}$ 의 집합들을 카르테시안 곱한 것은 적어도 하나의 원소를 가지고 있다는 것을 선택공리를 통해 알게 된다. 이와 같은 카르테시안 곱의 원소는, 정의에 의하면, 정의역이 index 집합 (이 경우는 $\mathcal{C}$) 이고 각각의 index 에 대한 함수값이 index 에 의해 정의된 (bearing) 집합에 속하는 함수다. 결론 : $A \in \mathcal{C}$ 라면 $f(A) \in A$ 를 만족하는 $\mathcal{C}$ 를 정의역으로 하는 함수 f가 존재한다. 이러한 결론은 특히, $\mathcal{C}$ 가 공집합이 아닌 집합 X 의 공집합이 아닌 모든 부분집합의 모임 (collection) 인 경우에 적용된다. 이 경우의

주장은, 정의역을 $\mathcal{P}(x) - \{\phi\}$ 로 하고 정의역 안의 A에 대해 $f(A) \in A$ 일 때, 그러한 정의역을 가진 함수 f 가 존재한다는 것이다. 직관적으로 기술하자면 많은 집합들 각각으로부터 어떤 원소를 동시에 선택하는 것이 함수 f 이다.; 이 때문에 이 공리에 선택공리라는 이름이 붙었다. (이러한 의미로 어떤 집합 X 의 공집합이 아닌 부분집합 각각으로부터 어떤 원소를 "선택" 하는 함수를 x 에 대한 선택함수라고 부른다.) 만일 우리가 선택하는 집합들의 모임이 유한하다면, 동시에 선택할 수 있다는 가능성은 선택공리가 언급되기 전부터 우리가 알고 있던 것의 단순한 결과물이다.; 공리의 역할은 우리가 선택하는 집합들의 모임이 무한한 경우에도 앞에서 언급한 가능성을 확인시켜 주는 것이다.

다음 문단에서 보게 될 선택 공리의 두 가지 결과들은 (하나는 집합의 멱집합에 대한 것이고 다른 하나는 집합들의 보다 일반적인 모임들에 대한 것이다) 사실상 공리를 제공식화한 것들이다. 선택공리의 각각의 결과들에 대해, 그 결과들을 증명하는데 있어 어느 정도나 공리가 필요한가를 검토하는 것이 중요하다고 여겨져 왔다. 선택공리를 사용하지 않고 증명하는 다른 방법은 victory 라고 불린다; victory 는 역증명으로써 (집합이론의 다른 공리들은 그대로 둔 채) 그 결과물이 선택공리와 동치라는 것을 보이는 것은 영광스러운 패배라는 의미다. 그 사이에 있는 어떤 것이든 약오르게 하는 (exasperating) 것으로 간주된다. 예를 들어 (연습 삼아서도) 우리는 모든 관계가 동일한 정의역을 갖는 함수를 포함한다고 주장한다. 또 다른 예로는; 만일 $\mathcal{C}$ 가 공집합이 아닌 서로소인 집합들 (pairwise disjoint non-empty sets : collection 안의 어떤 두 집합도 서로소인 집합들) 의 모임이라면, C(필기체) 에 있는 각각의 C 에 대해 $A \cap C$ 의 원소가 하나 뿐인 집합 (singleton) A 가 존재한다. 이 두 가지 주장은 선택공리와 동치라고 알려진 수많은 것들 중 일부다.

선택공리를 사용하는 예로서, 만일 어떤 집합이 무한집합이라면, 이 집합은 ω 와 동일한 부분집합을 가진다는 주장을 생각해 보자. 약식의 (간략한 informal) 논증은 아마 다음과 같을 것이다. 만일 X 가 무한집합이라면, 그 집합은 공집합이 아니다. (다시 말해 0과 같지 않다.); 따라서 그 집합은 어떤 원소를 갖고, 그것을 x_o 라 하자. X 는 1과 같지 않기 때문에, $X - \{x_0\}$ 집합은 공집합이 아니다; 따라서 그 집합은 어떤 원소를 갖고, 그것을 x_1 이라 하자. 이러한 논증을 무한히 반복해 보자; 예를 들어 다음 단계 $X - \{x_0, x_1\}$ 은 공집합이 아니고, 따라서 그 집합은 x_2 이라는 원소를 갖는다. 결과적으로 우리는 X 의 서로 구별되는 원소들의 무한 수열인 $\{x_n\}$ 을 얻을 수 있다; q.e.d. 이러한 간략한 증명의 장점은 증명 뒤에 숨은 가장 중요한 아이디어를 잘 보여준다는 점이다.; 공집합이 아닌 집합에서 원소를 뽑는 것은 무한히 자주 반복된다. 선택공리의 방법론에 숙련된 수학자라면 종종 이와 같은 약식의 논증을 제시할 것이다; 그는 수많은 경험 때문에 한 눈에 이것을 어떻게 정밀하게 만들지 알 수 있다. 그러나 (선택공리의 방법들에 익숙해져야 하는 우리는) 이를 조금 더 오래 들여다 볼 필요가 있다.

f 를 X 에 대한 선택함수라고 하자; 다시 말해 f 는 X의 공집합이 아닌 모든 부

분집합들의 모임을 X 로 대응시키는 함수이고, f 의 정의역에 있는 모든 A 에 대하여 $f(A) \in A$ 를 만족한다. 또 $\mathcal{C}$ 를 X 의 모든 유한 부분 모임이라고 하자. X 가 무한집합이므로, 만일 $A \in \mathcal{C}$(필기체) 라면, $X - A$ 는 공집합이 아니고, 따라서 $X - A$ 는 f 의 정의역에 포함된다. $\mathcal{C}$ 에서 $\mathcal{C}$ 로의 함수 g 를 $g(A) = A \cup \{f(X - A)\}$ 로 정의하자. (기호가 아닌) 언어로 표현하자면 ; $g(A)$ 는 f 가 $X - A$ 에서 선택한 원소들을 집합 A 에 추가함으로써 얻을 수 있다. 귀납 정리 (recursion theorem) 을 함수 g 에 적용하자; 우리는, 예를 들어, 그 과정을 공집합에서부터 시작할 수 있을 것이다. 그 결과로 ω 에서 $\mathcal{C}$ 속으로 (into) 대응시키며 $U(0) = \phi$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $U(n^+) = U(n) \cup \{f(X - U(n))\}$ 를 만족하는 함수 U 가 존재한다. 주장 ; 만일 $v(n) = f(X - U(n))$ 이라면, v 는 ω 에서 X 로의 일대일 대응과 동일하며, 그리고, 따라서, ω 는 X 의 어떠한 부분집합 (즉 v 의 치역) 과 동일하다. 이 주장을 증명하기 위하여, 기초적인 관찰을 통해 얻을 수 있는 일련의 정보들을 나열해 보자; 이것들에 대한 증명은 정의의 간단한 결과물이다. 첫 째 : 모든 n 에 대하여 $v(n) \in U(n)$ 이다. 둘 째 : 모든 n 에 대하여 $v(n) \notin U(n^+)$ 이다. 셋 째 : n 과 m 이 자연수이고 $n \leq m$ 이면 $U(n) \subset U(m)$ 이다. 넷 째 : n 과 m 이 자연수이고 $n < m$ 이면 $v(n) \neq U(m)$ 이다. (이유 : $v(n) \notin U(m)$ 이지만 $v(n) \in U(n)$) 마지막 정보 (observation) 는 v 는 서로 다른 자연수들을 X 의 서로 다른 원소들 위로 (onto) 대응시킨다는 것을 보여준다; 우리가 반드시 기억해야 할 것은 두 개의 서로 다른 자연수 중에서 하나는 분명히 다른 것보다 작다는 것이다.

증명이 완료되었다; 이제 우리는 모든 무한 집합은 ω 와 동일한 부분집합을 갖는다는 것을 안다. 방금 증명한 이 결과는, 선택공리를 사용하는 적절한 예로서, 그 자체로는 본질적인 중요성이 크지는 않지만, 흥미로운 따름정리를 수반한다. 그 따름정리의 내용은 어떤 집합이 주장은 어떤 집합은 자신의 진부분집합과 동일한 경우에, 그리고 동일한 경우에 한하여 (if and only if) 무한하다. "동일한 경우에"(if) 는 이미 우리가 알고 있다; 단지 유한한 집합은 자신의 부분집합과 동일하지 않다는 것을 언급하는 것으로 충분하다. "동일한 경우에 한하여"(only if) 를 증명하기 위해 X 가 무한집합이라고 가정하자. 그리고 v 는 ω 로부터 X 속으로 (into) 일대일 대응하다고 가정하자. 만일 x 가 v 의 치역에 포함된다면, 즉 $x = v(n)$ 이라면, $h(x) = v(n^+)$ 라고 쓰자; 만일 x 가 v 의 치역에 포함되지 않는다면, $h(x) = x$ 라고 쓰자. h 가 X 로부터 자기 자신 속으로 (into) 일대일대응하다는 것을 증명하기는 쉽다. h 의 치역이 X 의 진부분집합이므로 ($v(0)$ 를 포함하지 않는다) 따름정리의 증명은 완결되었다. 따름정리의 주장은 데데킨트에 의해 무한의 정의로 사용되었다.

16 초른의 보조정리 (ZORN'S LEMMA)

임의의 존재 정리 (An existence theorem) 는 주어진 집합에 속해있으며 주어진 조건을 만족하는 어떠한 대상이 존재한다고 언명 (言明) 한다. 많은 존재 정리들은 공식으로 나타낼 수 있으므로 (또는, 필요하다면, 재공식화할 수도 있으므로) 밑에서 보게 될 정리에 대해서 집합은 부분순서 집합 (partially ordered set) 이고, 대상에 대한 결정 조건 (crucial property) 은 극대이다. 우리의 다음 목표는 이러한 종류의 가장 중요한 정리를 서술하고, 증명하는 것이다.

정리 2 (초른의 보조정리 (Zorn's lemma)) 만약 부분순서 집합인 X 에 대해 X 안의 *(in X)* 모든 사슬 *(chain)* 이 상계 *(upper bound)* 를 갖고 있으면, X 는 극대 원소 *(maximal element)* 를 포함한다.

검토. 사슬이 완전순서집합 (totally ordered set) 을 의미한다는 점을 상기하자. 우리는 "X 안의" 사슬을 X 의 부분집합이며 그 자체로 부분순서 집합으로 간주되는 부분집합을 의미한다고 했으므로, 이는 결국 완전순서집합이 된다. 만약 A 가 X 안의 사슬이라면, 초른의 보조정리의 가정은 X 안의 A 에 대한 상계가 존재함을 보장한다; 이것은 A 에 대한 상계가 A 안에 존재함을 보장하지는 않는다. 초른의 보조정리의 결론은 만약 $a \leq x$ 일 때, 필연적으로 $a = x$ 가 된다는 조건을 만족하는 원소 a 가 X 안에 존재한다는 것이다.

증명의 기본적인 아이디어는 이전의 무한집합에 대한 논의에서 사용되었던 것과 유사하다. 가정에 의해, X 는 공집합이 아니므로 원소를 갖는다. 이 원소를 x_0 이라 하자. 만약 x_0 이 극대라면, 여기서 멈춘다. 만약 그렇지 않다면, 어떤 원소가 존재하는데, 이를 x_1 이라 하면, 이는 분명히 x_0 보다 크다. 만약 x_1 이 극대라면, 여기서 멈춘다; 그렇지 않으면 이 과정을 계속한다. 이러한 논증을 무한히 반복한다; 그러면 궁극적으로 극대 원소에 도달하게 된다.

맨 마지막 문장은 아마도 이 논증에서 가장 납득하기 어려운 부분일 것이다; 이 부분은 많은 어려운 부분을 내포하고 있다. 자세히 살펴보면, 예를 들어, 다음과 같은 가능성이 있다. 무한히 반복하는 과정이 극대 원소를 갖지 않는 무한수열 전체로 이르게 할 수도 있다는 반론이 제기될 수도 있다; 이럴 경우 우리는 어떻게 해야 하는가? 이에 대한 대답은 다음과 같다. 이러한 무한수열의 치역 (range) 이 X 안의 사슬 중 하나이고, 따라서 결과적으로, 상계를 갖는다; 우리가 할 일은 상계를 갖는다는 것에서부터 논증을 다시 시작하는 것이다. 언제, 어떻게 이 과정이 끝날지는 엄밀하게 말하기는 모호하지만, 우리는 반드시 엄밀한 증명을 들여다 봐야 한다. 증명의 구조는 체르멜로 (Zermelo) 가 했던 최초의 증명의 것을 채택하였다.

(증명) 첫 단계는 추상적인 부분순서를 적절한 집합들의 모임 (collection) 안의 포함 순서 (inclusion order) 로 바꾸는 것이다. 보다 정확히 말해, 우리는 X 의 원소 X 각각에 대해, 약절편 (weak initial segment) $\bar{s}(X)$ 는 x 와 그 이전의 모든 원소들로

이루져 있다고 할 것이다. 함수$\overline{s}$(X 에서 $\rho(X)$ 로의 함수) 의 치역 δ는 X 의 부분집합들의 어떤 모임이고, 우리는 이것을, 당연하게도, 포함 (inclusion)(부분적으로) 에 의해 순서가 주어진 것으로 생각할 것이다. 함수$\overline{s}$는 일대일이고, $\overline{s}(x)\subset\overline{s}(y)$ 의 필요충분조건은 $x \leq y$ 이다. 이러한 관점에서, X 안의 극대 원소를 찾는 일은 δ 안의 극대 집합 (maximal set) 을 찾는 일과 같다. X 안의 사슬에 대한 가정은 δ 안의 사슬에 대해 대응하는 명제를 포함한다.(그리고, 사실은, 동치이다)

χ를 X 안의 모든 사슬들의 집합이라 하자; χ 의 모든 요소 (member) 들은 X 안의 어떤 x 에 대한 $\overline{s}(X)$ 안에 포함되어 있다.. χ 의 모임은 집합들의 모임이며 공모임 (non-empty collection) 이 아니고, 포함에 의해 부분순서이다. 그리고 만약 C 가 χ 안의 사슬일 경우, C 안의 집합들의 합집합 (다시 말해, $\bigcup_{A\in C} A$) 은 χ 에 속한다. χ 안의 각 집합들이 S 의 어떤 집합에 의해 결정되므로, S 에서 χ 로의 이행은 어떤 새로운 극대 원소도 끌어들이지 못한다. χ 의 모임이 갖는 한 가지 이점은 사슬에 대한 가정을 조금 더 구체적인 형태로 표현한다는 점이다.; 사슬 C 가 S 안에 어떤 상계를 갖는다고 말하는 대신, 우리는 C 의 집합들의 합집합은 C 의 하나의 상계를 분명히 갖고 있으며, 모임 χ 의 원소라는 점을 분명히 말할 수있다. χ 의 또 다른 기술적인 이점은 이것이 각 집합들의 모든 부분집합들을 포함한다는 점이다; 이는 χ 안의 비 극대 집합들 (non-maximal sets) 을 천천히, 한번에 한 원소씩 확장시키는 것을 가능케 한다.

이제 우리는 X 안의 주어진 부분순서에 대해 생각하지 않아도 된다. 다음으로 우리가 생각할 것은 공집합이 아닌 집합 X 의 부분집합들의 공모임이 아닌 모임 χ 로, 이는 다음의 두 조건을 갖는다: χ 안의 각 집합의 모든 부분집합들은 χ 안에 있다. 그리고 χ 안의 집합들의 각 사슬들의 합집합은 χ 안에 있다. 첫 번째 조건이 $\varnothing \in \chi$를 의미한다는 것을 염두에 두자. 우리의 임무는 χ 안에 극대 집합이 존재함을 증명하는 것이다.

f 를 X 에 대한 선택함수 (choice function) 라 하면, f 는 X 의 공집합이 아닌 모든 부분집합들의 모임으로부터, f 의 정의역 안에 있는 모든 A 에 대해 $F(A) \in A$ 를 만족하는 X 로의 함수이다. χ 안의 각 집합 A 에 대해, A'(원문에는 A 위에 가 씌워진 모양이지만 편의상 A' 로 표기하였음)를 A 와의 합집합이 χ 의 원소가 되는 집합 X 의 모든 원소 x 들의 집합이라 하자.χ 다른 말로 하면, $\{x \in X : A\bigcup\{x\}\}$ 이다. χ 에서 χ 로의 함수 g 를 다음과 같이 정의하자: 만약 $A' - A = \varnothing$ 이면, $g(A) = A\bigcup F(A' - A)$ 이다; 만약 $A' - A = \varnothing$ 이면, $g(A) = A$ 이다. A' 의 정의로부터, $A' - A = \varnothing$ 와 A 가 극대라는 것이 필요충분조건임을 알 수 있다. 이러한 조건 하에서, 그러므로, 우리가 반드시 증명해야 할 것은 χ 안에 $g(A) = A$ 를 만족하는 집합 A 가 존재한다는 것이다. 이는 g 의 결정 조건이 g(A)(이는 항상 A 를 포함한다) 가 기껏해야 A 보다 한 개 더 많은 원소를 포함한다는 것과 같다는 것을 의미한다.

이제, 설명의 편의를 위해, 임시적으로 다음과 같은 정의를 하겠다. 다음을 만족하는 χ 의 부분모임 (subcollection) J 를 타워 (tower) 라고 한다.

(i) $\varnothing \in$ J,

(ii) 만약 $A \in$ J 이면, g(A) $\in$ J,

(iii) 만약 C 가 J 의 사슬이라면, $\bigcup_{A \in C} A \in$ J 이다.

타워는 분명히 존재한다; 전체 모임 χ 가 그 중 하나이다. 타워들의 모임의 교집합이 다시 타워가 되고, 따라서, 특히, 만약 J_0 를 모든 타워들의 교집합이라고 하면, J_0 은 가장 작은 타워가 된다. 이제 우리의 목표는 타워 J_0 이 사슬임을 증명하는 것이다.

이제 J_0 안의 집합 C 가 J_0 안의 모든 집합에 대해 비교가능 (comparable) 일 때, C 를 비교가능 (comparable) 이라고 하자.; 이는 만약 $A \in J_0$ 이면, $A \subset C$ 또는 $C \subset A$ 임을 의미한다. J_0 가 사슬이다' 라고 말하는 것은 J_0 안의 모든 집합들이 비교가능하다는 것을 의미한다. 비교가능 집합들은 분명히 존재한다; $\varnothing$ 이 그것들 중 하나다. 다음 두 문단을 통해 우리는 임의로 주어진 그러나 임시적으로 고정된 비교가능 집합 C 에 주의를 집중할 것이다.

A$\in$ J_0 그리고 A 가 C 의 진부분집합일 경우를 생각해보자. 주장: $g(A) \subset C$. 이에 대한 근거는 C 가 비교가능이므로, $g(A) \subset C$ 이거나 또는 C 가 $g(A)$ 의 진부분집합이라는 점이다. 후자의 경우 A 는 g(A) 의 진부분집합의 진부분집합이고, 이것은 g(A) $- A$ 가 singleton(원소를 오직 하나만 갖는 집합) 이상이 되지 못한다는 사실에 모순된다.

다음으로 J_0 안의 A⊠C 또는 $g(C) \subset A$ 을 만족하는 모든 집합 A 들의 모임 U 에 대해 고려해보자. 모임 U 는 $g(C)$ 와 비교해서 J_0 안의 집합들의 모임보다 약간 작다; 사실, 만약, $A \in U$ 라면, $C \subset g(C)$ 에 의해 $A \subset g(C)$ or $g(C) \subset A$ 이다. 주장: U 는 타워이다. $\varnothing \subset C$ 이므로, 타워의 첫번째 조건은 만족된다. 두번째 조건을 증명하기 위해서, 다시 말해, 만약 $A \in U$ 일 때, g(A) $\in U$ 는 것을 증명하기 위해서는 세 가지 경우로 나누어 검토해 봐야 한다. 첫째: A 가 C 의 진부분집합일 경우. 이전의 논의에 의해 g(A) $\subset C$ 이므로, 따라서 g(A) $\in U$ 이다. 둘째: $A = C$ 인 경우 이때 g(A) $= g(C)$ 이므로, $g(C) \subset g$(A) 이다. 따라서 g(A) $\in U$ 이다. 셋째: $g(C) \subset A$ 인 경우 이때 $g(C) \subset g$(A) 이므로, g(A) $\in U$ 이다. 타워의 세번째 조건은, 다시 말해, U 안의 사슬들의 합집합은 U 에 포함된다는 것이고, 이는 U 의 정의로부터 직접적으로 얻어진다. 결론: U 는 J_0 에 포함된 타워이고, J_0 가 가장 작은 타워이므로, 따라서 $U = J_0$ 이다.

전술한 논의는 각각의 비교가능 집합 C 에 대해 집합 $g(C)$ 도 또한 비교가능하다는 것을 의미한다. 이유: 주어진 C 에 대해 위와 같이 U 를 만들자.; $U = J_0$ 라는 것은 만약 $A \in J_0$ 일 경우, $A \subset C$ ($A \subset g(C)$ 인 경우에) 또는 $g(C) \subset A$ 라는 것을 의미한다.

우리는 이제 공집합이 비교가능하다는 것과 g가 비교가능 집합에서 비교가능 집합으로(onto) 사상(map) 한다는 것을 알았다. 비교가능 집합들의 사슬의 합집합이 비교가능하므로, 따라서 (J_0 안의) 비교가능 집합들은 타워를 구성한다. 그리고 그것들은 J_0를 소산시킨다(exhaust); 이것은 우리가 J_0에 대한 증명을 하기 위해 설정한 것이다.

J_0이 사슬이므로, J_0 안의 모든 집합들의 합집합을 A라 하면, A는 그 자체로 J_0 안의 집합이다. 합집합이 J_0 안의 모든 집합들을 포함하므로, 따라서 $g(\mathrm{A}) \subset A$이다. $A \subset g(\mathrm{A})$가 항상 성립하므로, 따라서 $A = g(\mathrm{A})$이고, 이로써 초른의 보조정리에 대한 증명이 끝난다.

[연습문제] 초른의 보조정리는 선택 공리(the axiom of choice)와 동치이다. [증명에 대한 힌트: 주어진 집합 X에 대해, $domf \subset p(\mathrm{X}), ranf \subset X$ 그리고 $(domf)$ 안의 모든 A에 대해 $f(A) \in A$를 만족하는 함수 f에 대해 생각해보라; 확장(extension)을 통해 이러한 함수들에 순서를 매기고, 초른의 보조정리를 사용해 이들 중 극대를 찾고, f가 극대일 때 $domf = p(X) - \{\varnothing\}$임을 증명하라.] 다음에 주어진 명제들 각각에 대해 고찰해보고 이 명제들 또한 선택공리와 동치임을 증명하여라.

(i) 모든 부분순서 집합은 극대 사슬(maximal chain)을 갖는다. (다시 말해, 사슬은 다른 사슬의 진부분집합이 아니다.)

(ii) 부분순서 집합 안의 모든 사슬은 어떤 극대 사슬에 포함된다.

(iii) 그 안의 각각의 사슬이 최소 상계(least upper bound)를 갖는 모든 부분순서집합은 극대 원소를 갖는다.

17 순서 잘매기기 (well ordering)

부분적으로 순서 매긴 집합은 가장 작은 원소를 갖지 않을지도 모른다. 그리고 그 집합이 가장 작은 원소를 가지고 있을 지라도, 몇몇 부분집합은 가장 작은 원소를 갖지 못 할 가능성이 충분하다. 만약 부분적으로 순서 매긴 집합의 공집합이 아닌 모든 부분집합이 가장 작은 원소를 갖는다면, 그 집합은 순서가 잘 매겨졌다고 (well ordered) 불린다. (그리고 그것의 순서매김은 well ordering 이라 부른다.) 임의의 예와 반례를 살펴보기에 앞서, 그 어떤 것도 고려하지 않은 이 정의의 한 가지 결론은 모든 well ordered 집합은 완전히, 모두 순서가 매겨있다는 것이다. 실제로, 만약 x 와 y 가 well ordered 집합의 원소라면 $\{x, y\}$ 는 그 well ordered 집합의 공집합이 아닌 부분집합이고 첫 번째 원소를 가진다 ; 그 첫 번째 원소가 x 또는 y 임에 따라 $x \leq y$ 또는 $y \leq x$ 이다. 각각의 자연수 n 에 있어서, n 앞에 모든 수들의 집합 (즉, 정의에 의해서 집합 n) 은 well ordered(크기로 순서를 매긴) 집합이고 그 것은 모든 자연수의 집합 w 에 해당된다. $(2a + 1)2^y \leq (2x + 1)2^b$ 를 의미하도록 정의 된 $(a, b) \leq (x, y)$ 를 가진 집합 $w{\times}w$ 는 well ordered 가 아니다. 이 것을 확인하는 하나의 방법은 모든 a, b 에 대하여 $(a, b + 1) \leq (a, b)$ 임을 체크하면 된다 ; $w{\times}w$ 전체 집합은 가장 작은 원소를 갖지 않음이 성립된다. $w{\times}w$ 인 몇몇 부분 집합은 가장 작은 원소를 갖는다. 예를 들어, $(1, 1) \leq (a, b)$ 인 모든 순서쌍 (a, b) 의 집합 E 를 고려해보면, 집합 E 는 $(1, 1)$ 을 가장 작은 원소로 갖는다. 주의 : 그 집합 자신의 정의에 따라 부분적으로 순서 매긴 집합으로 고려될 때, E 는 여전히 well ordered 가 아니다. 문제는 E 가 가장 작은 원소를 가질 지라도, E 의 많은 부분 집합들은 가장 작은 원소를 갖지 않는다 ; 한 예로 E 안에서 $(a, b) \neq (1, 1)$ 인 모든 순서쌍 (a, b) 의 집합을 고려해 보아라. 한 가지 더 예 : $w{\times}w$ 는 사전 배열식 순서매김에 의해서 well ordered 이다.

well ordered 집합들에 대해 가장 만족할 만한 사실 중 하나는 수학적 귀납법과 유사한 과정으로 그들의 원소에 관한 것들을 증명할 수 있다는 것이다. 정확히 말하면, S 가 well ordered 집합 X 의 부분집합이고, X 의 원소 x 의 전체 초기 부분 $s(x)$ 는 S 에 포함될 때마다를 가정하면, x 는 그 자체로 S 에 속한다 ; 초한의 귀납법의 원리는 이러한 조건 하에 우리는 $S = X$ 여야 한다고 주장한다. 마찬가지로 : 만약 각각의 원소의 모든 앞 수들의 집합의 존재는 항상 그 자체 원소의 존재를 암시하고, 그 집합은 모든 것을 포함 해야만 한다.

그 증명을 조사하기에 앞서 몇 가지 진술이 있다. 수학적 귀납법의 일반적인 원리의 진술은 두 가지의 돋보이는 사항에서 초한적 귀납법의 진술과 다르다. 하나 : 그것의 앞 수부터 각각의 원소까지 지나가는 대신에 모든 그것의 앞 수들의 집합부터 후자의 각가 원소까지 지난다. 둘 : 후자에 있어서 시작 원소에 (0 같은 원소) 대한 가정이 없다. 첫 번째 차이점은 중요하다 : well ordered 집합의 원소는 바로 앞 수를 갖지 않을 수도 있다. w 에 적용될 때 위 진술은 수학적 귀납법의 원리와

같음이 쉽게 증명된다 ; 그러나 임의의 well ordered 집합에 적용 될 때, 그 원리는 초한적 귀납법의 원리와 동등하지 않다. 그 것을 다르게 놓는 것 : 두 진술은 일반적으로 서로 다르다 ; w 에 있어서 그들의 동등함은 특별한 조건하에 이루어진다.

여기 한 예가 있다.X가 w^+, 즉, $X = w \cup \{w\}$ 라 하자. X 의 순서를 보통처럼 w 의 원소들을 순서매기는 것과 w 에 있는 모든 n 에 대해 $n < w$ 를 고려하면서 정의하자. 그 결과는 well ordered 집합니다. 질문 : $n \in S$ 일 때마다 $0 \in S$ 이고 $n + 1 \in S$ 인 X 의 진 부분 집합 S 가 존재 하는가? 답 : 존재한다. 다시 말하면 $S = w$ 이다.

수학적 귀납법과 초한적 귀납법의 두 번째 차이점은(후자를 위해 요구되는 시작 원소가 없음) 개념적이기 보다는 언어적 이다. 만약 x_0 가 X 의 가장 작은 원소라면 $s(x_0)$ 는 비어있고(공집합), 결과적으로 $s(x_0) \subset S$ 이다 ; 따라서 초한적 귀납법의 원리의 가정은 x_0 가 S 에 속하는 것을 요구한다.

초한적 귀납법의 원리의 증명은 거의 당연하다. 만약 $X - S$(차집합)가 공집합이 아니라면, 그것은 x 라 불리는 가장 작은 원소를 갖는다. 이것은 초기 부분 $s(x)$ 의 모든 원소가 S 에 속함을 암시한다. 그러므로 귀납법 가정에 의해 x 는 S 에 속한다. 이것은 모순이다 (x 는 S 와 $X - S$ 모두에 속할 수 없다.) ; 그 결론은 $X - S$ 는 결국 공집합이라는 것이다.

만약 우선적으로 B 가 A 의 부분집합이고, 다음으로 B 가 A 의 초기 부분이고, 마지막으로 B 의 원소의 순서매김이 A 에서의 순서매김과 똑같다면, well ordered 집합 A 가 well ordered 집합 B 의 연속이라고 말할 수 있다. well ordered 집합 A 는 well ordered 집합 B 의 연속이다. 그러므로 만약에 X 가 well ordered 집합이면서 a 와 b 가 $b < a$ 인 X 의 원소들이라면, $s(a)$ 는 s(b) 의 연속이고 당연히 X 는 $s(a)$ 와 s(b) 모두의 연속이다.

만약에 C 가 well ordered 집합의 초기 부분 어떤 임의의 모임이라면 C 는 연속과 관계가 있는 고리 (chain) 이다; 이말은 C 가 한 모임의 어느 서로 다른 두 성분 중 한 성분이 다른 한 성분에 연속인 성질을 가지는 well ordered 집합의 모임이라는 의미다. 이 언급된 말의 역의 진술도 진실이며 종종 유용하다. 만약 well ordered 집합의 모임인 C 가 연속과 관계가 있는 chain 이고, U 가 C 의 집합들의 합집합 (union) 이라면, U 가 모임 C 내에서 각각의 집합 (U 자신과는 다른) 의 연속일 수 있게 하는 U 의 well ordering 은 유일하다. 개략적으로 말해서, well ordered 집합들의 chain 의 합집합은 well ordered 이다. 이 간략화된 공식은 조심스럽게 봐야한다. 왜냐하면 그것은 ”chain” 의 의미가 연속에 관계가 있다는것을 설명해주지 않기 때문이다. 만약 ”chain” 이라는 단어에 의해 연상되는 순서매김이 간단히 순서를 보존하는 것이 포함된다면 결론은 타당하지 않다.

증명은 간단하다. 만약 a 와 b 가 U 안에 있으면, C 안에서 $a \in A$ 이고 $b \in B$ 인 A 와 B 인 집합들이 존재한다. $A = B$ 이거나 A 나 B 중 하나가 다른 하나에 연속이기 때문에, 그것은 모든 상황에서 a 와 b 둘다 C 안의 어느 집합에 속한다는 것의

의미가 따라온다; U 의 순서매김은 각각의 순서쌍인 $\{a, b\}$ 의 순서매김 방법(a 와 b 둘다를 포함하는 C 의 어떤 집합 안에서 순서매김되는 방법) 에 의해 정의된다. C 가 chain 이므로, 이 순서매김은 명백하게 결정된다 (U 안에서 약속된 순서매김을 정함의 대체 방법으로 C 의 집합들 안에서 주어진 순서매김들은 순서가 매겨진 쌍들의 집합들이라는걸 생각(상기) 하고, 순서 매겨진 쌍들의 그러한 모든 집합들의 합집합(union) 을 형성하는 것이다)

직접적인 증명은 앞절에서 정의된 관계가 실제 순서매김이고, 게다가 그것의 구성은 모든 단계마다 우리에게 강요된다.(즉, 마지막 순서매김은 주어진 orders 에 의해 유일하게 결정된다. 결과가 실제로 well ordering 이라는 것에 대한 증명은 동일하게 직접적이다. U 의 각각의 공집합이 아닌 부분집합은 반드시 C 내의 어떤 집합과의 공집합이 아닌 교집합을 가져야 하고, 따라서 그것은 반드시 그 집합의 첫번째 원소를 가져야 한다; C 가 연속 chain 이라는 사실은 또한 첫번째 원소가 반드시 U 의 첫번째 원소인 것을 암시한다.

> **[연습문제]** 부분적으로 순서매겨진 X 집합의 부분집합 A 는 X 의 각각의 원소 x 에 $x \leq a$ 인 A 집합의 a 란 원소가 존재하는 경우에 집합 X 안에서의 'cofinal' 이라고 한다. 완전하게 순서가 매겨진 모든 집합은 'cofinal well ordered' 부분집합을 가지는 것을 증명하라.

따라오는 결과와 다른 것들 사이에서 초한적 귀납법 원리가 우연히 흘끗보며 가리키는 것보다 넓게 적용될수 있는 것을 우리가 추론하는것에서 well ordering 의 중요성이 생긴다.

정리 3 (순서를 잘 매김에 관한 정리 (Well ordering theorem)) 모든 집합은 *well oredered* 할수 있다.

토론. 좀더 나은(그러나 덜 전통적인) 진술은 이것이다: 각각의 집합 X 에 대하여 영역 X 과 함께 well ordering 이 있다. 주의: well ordering 은 주어진 집합이 이미 지니고 있는 어떤 다른 구조가 무엇이든 간에 그 구조와 어떤 관계를 가진다고 약속되어 있지 않다. 예로, 만약 독자가 부분적이거나 완전하게 순서매겨진 집합들(그것들의 순서매김은 매우 명확하게 well ordering 되어 있지 않다.) 을 안다면, 독자는 모순을 찾았다고 결론을 바로 내리지 않아야 한다. 오직 끄집어져나온 결론은 집합들은 많은 방법으로 순서매겨질수 있고, 그중의 어떤 것들은 well orderings 이고 다른것은 아니라는 것, 그리고 우리는 이미 그것을 알고 있다.

(증명) 우리는 Zorn 의 보조정리를 이용한다. 주어진 집합 X 에서, X 의 모든 well ordered 부분집합들의 모임 ω 을 고려해보자. 명쾌하게: ω 의 원소는 A 의 순서매김을 갖는 X 의 부분집합 A 이다. 우리는 부분적으로 ω 를 연속에 의해서 순서를 매긴다.

모임 ω 은 공집합이 아니면, 왜냐하면, 예를 들어 ω 에 공집합이 포함되기때문이다.(???) 만약 X 가 공집합이 아니고 ω 의 덜 성가신 원소들이 나타내질수 있다; X

의 어떤 특별한 원소 x 에 대해서 $\{(x,x)\}$ 같이 나타낸다. 만약 C 가 ω 안에서 chain 이면 C 안의 집합들의 합집합 U 는 U 를 C 안에서 각각의 집합들보다 크거나 같게 만드는 유일한 well ordering 을 가진다; 이것은 확실하게 연속에 관한 앞의 토론이 달성한 것이다. 그 뜻은 Zorn 의 보조정리의 주요 가정이 증명된 것을 의미한다; 결론은 ω 안에서 M 이라고 하는 가장큰 well oredered 집합이 존재한다는 것이다. 집합 n 은 전체 집합 X 와 동일해야 한다. 이유: 만약 x 가 n 안에 있지 않은 X 의 원소라면, x 를 n 의 모든 원소들 뒤에 놓음으로써 n 은 확대 될 수 있다. 명백하지만 형식적이지 않은 묘사로 된 이 엄격한 공식은 독자들에게 연습으로 남겨두겠다. 이런 신기한 방법으로 (out of the way), well ordering therem 의 증명은 완결된다.

[연습문제] 완전하게 순서매겨진 집합은 각각의 원소의 전 값들의 집합이 well oredered 일 때 well oredered 임을 증명하여라. 부분적으로 순서매겨진 집합들에 적용할 어떤 조건이 있는가?

well ordering theorem 은 선택의 공리 (그리고 그 공리와 Zorn 의 보조정리에 동치임을) 암시하는지 증명하여라.

만약 R 이 집합 X 안에서 부분적인 순서라면, X 안의 S 가 존재하여 $R \subset S$ 가 되는 완전한 순서 S 가 존재함을 증명하라; 다시말해 정의역을 넓히지 않고 모든 부분적순서는 전체적순서로 확장될수 있는가에 대해 증명하여라

18 초한적 회귀

" 귀납에 의한 정의" 의 과정은 초한적 상황을 가지고 있다. 보통의 회귀이론은 ω 에서의 함수를 만든다; 소재는 n 바로 전 원소의 함수값 으로부터 ω 의 0 이 아닌 각각의 원소 n 에서의 함수 값을 얻는 방법이다. 초한적 상황은 임의의 정렬 집합 W 에서의 함수를 만들 수 있다; 소재는 a 의 전에 있는 모든 원소들의 함수값으로부터 W 의 각각의 원소 a 에서의 함수 값을 얻는 방법이다.

결과를 간결하게 언급할 수 있게 하기 위해서, 우리는 몇 가지 보조 개념들을 도입해야 한다. 만약 a 가 정렬된 집합 W 의 원소이고 X 가 임의의 집합이라면, X 에서의 유형a 의 수열에 의해 우리는 W 에서X 로 향하는 초기성분 a 의 함수라 생각할 수 있다. 유형a 의 수열 (w^+ 에서의 a)은 단지 전에 우리가 수열이라고 부르던 것이고 $a < \omega$ 또는 $a = \omega$ 에 따라 유한 또는 무한이다. 만약 U 가 W 에서 X 로의 함수라면, a 의 초기 성분 $s(a)$ 로 향하는 U 의 한정은 W 에서의 각각의 a 에 대한 유형a 의 수열의 한 예이다; 따라서 우리는 U^a ($U|s(a)$ 대신에) 에 의한 수열로 정의하는 것을 쉽게 찾을 수 있다.

X 에서의 유형W 의 수열 함수는 정의역이 X 에서의 모든 유형a 의 수열로 구성되어 있고 (W 에서의 모든 원소 a), 치역이 X 에 포함되는 함수 f 이다. 개략적으로 말하면, 수열 함수는 수열을 어떻게 "늘이게" 하는지를 알게 해 준다; W 의 어떤 원소까지 뻗어있는 수열이 주어진다면 우리는 하나 이상의 항을 추가하기 위해 수열 함수를 사용할 수 있다.

정리 4 (초한 회귀 이론) 만약 W 가 정렬된 집합이고 f 가 집합 X 에서의 유형 W 의 수열 함수이면, W에서의 각각의 a에 대해 $U(a) = f(U^a)$ 를만족하는 W 에서 X 로 향하는 함수 U 는 오직 하나만이 존재한다.

(증명) 유일성의 증명은 쉬운 초한 귀납법이다. 존재를 증명하기 위해서, W 에서 X 로 향하는 함수는 $W \times X$ 의 부분집합의 특정 종류임을 상기하자; 우리는 명백하게 순서쌍들의 집합으로써 U 를 구성해보자. 만약 A 가 다음의 성질을 만족한다면 $W \times X$ 의 부분집합 A 를 f 에 닫혀있다고 하자: $a \in W$ 이고 t 가 A 에 포함된 유형a 의 수열이면 (즉, 초기 성분 $s(a)$ 에서의 모든 c 에 대해서 $(c, t(c)) \in A$), $(a, f(t)) \in A$ 이다. $W \times X$ 자체가 f 에 닫혀 있기 때문에 이러한 집합들이 존재한다; U 를 그들 모두의 교집합이라고 하자. U 자체는 f 닫혀있는, U 가 함수임을 증명하기만 하면 된다. 다른 말로 우리는 W 에 있는 각각의 c 에 대해서 $(c, x) \in U$ 를 만족하는 많아야 한 개의 원소x 가X 에 존재한다. (명백하게: 만약 (c, x) 와 (c, y) 가 U 에 속해있다면, $x = y$ 이다.) 이 증명은 귀납적이다. 많아야 하나의 x 에대해서 $(c, x) \in U$ 를 참이게 하는 W 의 모든 원소들 c 의 집합을 S 라고 하자. 만약 $s(a) \subset S$ 이면 $a \in S$ 임을 증명할 것이다.

$s(a) \subset S$ 라는 것은 만약 W 에서 $c < a$ 이면, $(c, x) \in U$ 를 만족하는 유일한 원소 x 가 X 에 존재하는 것을 의미한다. 그것에 의하여 정의된 $c \to x$ 대응은 t ($t \subset U$) 라고 하는 유형 a 의 수열이다. 만약 a 가 S 에 속하지 않는다면, $f(t)$ 와 다른 어떤y 에 대해서 $(a, y) \in U$ 이다. 주장: 집합 $U - \{(a, y)\}$ 는 f 에 닫혀있다. 이것은 만약 $b \in W$ 이고 r 이 $U - \{(a, y)\}$ 를 포함된 유형b 의 수열이라면 $(b, f(r)) \in U - \{(a, y)\}$ 을 의미한다. 실제로, 만약 $b = a$ 라면, r 은 반드시 t 이고 (이론의 존재에 대한 주장에 의해서) 감소된 집합이 $(b, f(r))$ 을 포함하는 이유는 $f(t) \neq y$ 이기 때문이다; 만약 반대로 $b \neq a$ 이면, 감소된 집합이 $(b, f(r))$ 을 포함하는 이유는 U 가 f 에 닫힌 (그리고 $b \neq a$) 이기 때문이다. 이것은 U 가 가장 작은 f 닫힌집합이라는 것에 모순되고 우리는 $a \in S$ 라고 결론지을 수 있을 것이다.

초한적 회귀이론의 존재에 대한 주장의 증명이 끝났다. 초한적 회귀 이론의 응용은 초한 귀납에 의한 정의라고 부른다.

우리는 초한 반복 이론이 어떻게 적용되어지는가에 대한 설명으로서의 역할을 하는 순서 이론의 중요한 부분을 계속 해 왔다.

만약 그들 사이에서 1-1 대응을 유지하는 순서가 존재한다면 부분적으로 정렬된 두 개의 집합 (특히 완전히 순서 매겨지고 정렬된) 을 유사하다고 한다. 좀 더 명백하게 말해보자: 부분적으로 정렬된 유사한 집합 X 와 Y 는 (기호로 $X \cong Y$) 만약 X 에 속한 a 와 b 가 있다면, $f(a) \leq f(b)$ (Y 에서) 인 필요충분조건은 $a \leq b$ (X 에서) 인 것을 만족하는 1-1 대응 (f 라고 부르며 X 에서 Y 로 향하는) 이 존재한다는 것을 의미한다. f 와 같은 대응은 때때로 유사성라고도 한다.

[연습문제] 유사성은 $<$ 을 보존함을 증명하라. (정의가$\leq$ 의 보존을 요구한다는 맥락에서) 또한 사실은 부분적으로 정렬된 집합인 것에서 다른 집합으로 대응하는 1-1 함수가 유사성이라는 것은 이것이 $<$ 를 보존한다는 것과 동치임을 증명하라.

부분 순서 집합 X 위의 항등 함수는 X 부터 X 로의 유사성이다. 만약 X 와 Y 가 부분적으로 정렬된 집합들이고, f 가 X 에서 Y 로의 유사성이라면, (f 가 일대일 함수이기 때문에) Y 에서 X 로의 명백히 정의되어있는 역함수 f^{-1} 이 존재하고 f^{-1} 이 유사성이다. 게다가 만약에, g 가 Y 에서 부분적으로 정렬된 집합 Z 로의 유사성이면, 합성함수 gf 는 X 에서 Z 로의 유사성이다. 그것은 만약 우리가 몇 개의 특별한 집합 E 에 주의를 기울이는 것을 제한하고, 우리가 오직 변역이 E 의 부분집합인 부분적 정렬 집합 같은 것들만 고려한다면, 유사성은 얻어지는 부분적으로 정렬된 집합들의 집합 안에서 동치 관계라는 말을 따른다. 앞서 말한 일은 만약 우리가 영역을 더욱 크게 제한하고 변역이 E 에 포함된 잘 정렬되어 있는 집합들만을 고려한다면 진실이다; 유사성은 얻어지는 잘 정렬된 집합들의 집합 안에서 동치 관계이다. 유사성이 완전한 법칙 안에서 부분적으로 정렬된 집합들에서 정의되고,

그 단계에서 과목이 공부될 수 있음에도 불구하고, 우리의 관심은 오직 잘 정렬된 집합들에서의 유사성이다.

잘 정렬된 집합이 적절한 부분집합과 유사하게 되는 것은 쉽게 일어날 수 있다; 예로, 모든 자연수의 집합과 모든 짝수의 집합을 살펴보자. (만약, $m = 2n$ 이 되는 n 이 존재하게 될 때 항상, 자연수 m 은 짝수로 정의된다. 함수 $n \to 2n$ 은 모든 자연수들의 집합에서 모든 짝수들의 집합으로의 유사성이다.) 그러나 잘 규정되어 있는 집합과 그것 자체의 부분의 유사성은 매우 특별한 종류의 함수이다. 만약, 사실, f 가 정렬집합 X 의 유사성 (그것 자체로의) 이면, $a \leq f(a)$ 이다. (X 안에 각각의 a 에 대해) 증명은 직접적으로 정렬집합의 정의에 바탕을 둔다. 만약 $f(b) < b$ 가 되는 원소들 b 가 있을 때, 그것들 사이에 최소의 것이 있다. 만약, $a < b$ 라면 (b 가 최소의 것일 때) $a \leq f(a)$ 이다.; 특별히 그것은 따른다. $a = f(b)$ 일 때, $f(b) \leq f(f(b))$ 인 것을. 그러나, $f(b) < b$ 이기 때문에 f의 정렬을 보존하려는 특성은 $f(f(b)) < f(b)$ 를 추론한다. 모순의 유일한 해결법은 $f(b) < b$ 의 불가능성을 받아들이는 것이다.

앞 문단의 결과는 세 개의 특별히 유용한 결론들을 가진다. 처음 것은 만약, X 와 Y 라는 두 개의 완전히 유사한 정렬집합들이 있을 때, 그것들 사이의 단지 하나의 유사성이 있다. g 와 h 를 X 에서 Y 로의 유사성들이라고 가정하고, $f = g^{-1}h$ 라고 쓰자. f 가 X 에서 그것 자체로의 유사성이기 때문에, 그것은 $a \leq f(a)$ 를 따른다. (X 안의 각각의 a 에 대하여) 이것은 X 안의 각각의 a 에 대하여 $a \leq g - 1(h(a))$ 인 것을 의미한다. g 를 대입하면, 우리는 X 안의 각각의 a 에 대하여 $g(a) \leq h(a)$ 를 추론한다. g 와 h 는 대칭이고, 따라서 우리는 또한 X 안의 각각의 a 에 대해 $h(a) \leq g(a)$ 를 추론할 수 있다. 결론 : $g = h$.

두 번째 결론은 정렬집합은 그것의 초기 성분들 중의 하나와 절대 유사할 수 없다는 사실이다. 만약, X 가 정렬집합이고, a 가 X 의 원소이고, f 가 X 에서 $s(a)$ 로의 유사성이라면, $f(a) \in s(a)$ 이고, 그러므로 $f(a) < a$ 이고, 그것은 불가능하다.

세 번째 그리고 가장 중요한 결론은 정렬 집합들에 대한 공통점 이론이다. 이것은 만약 X 와 Y 들은 정렬집합들이면, X 와 Y 가 유사하거나 그것들 중 하나가 다른 하나의 초기 성분과 유사하다는 말이다. 그것을 피하기가 완벽히 쉽더라도, 우리는 증명에서 초한의 회귀 이론을 사용할 수 있다. 우리는 X 와 Y 는 공집합이 아닌 정렬 집합들이라고 가정한다. (둘 다 서로 다른 것의 초기성분과 유사하지 않다); 우리는 이 상황들 하에서 X 가 Y 에 유사해야 된다고 증명하는 것을 계속한다. $a \in X$ 이고, t 를 Y 안에서 원소 유형a 의 결과라고 가정하자; 다른 말로, t 는 $s(a)$ 에서 Y 로의 함수이다. $f(t)$ 를 Y 안에서 t 의 범위의 적당한 상계들 중에서의 최소라고 하자; 반대의 경우에서는, $f(t)$ 를 Y 에서 최소의 원소라 하자. 초한적 회귀이론의 전문용어에서, 그것에 의하여 결정되는 함수 f 는 Y 에서 X 의 연속적인 함수이다. U 를 초한적 회귀이론이 이 상황에 연관시킨 함수라고 하자. 쉬운 논증

(초한의 귀납에 의해) 은 보여준다. X 안의 각각의 z 에 대해, 함수 U 는 X 에서 a 에 의해 결정되는 초기 성분을 Y 에서 $U(a)$ 에 의해 결정되는 초기성분으로 일대일로 집합을 옮긴다. 이것은 U 가 유사성이라는 것을 추론하고, 증명은 완전하다.

이것은 초한적 회귀이론을 사용하지 않는 대안적인 증명의 개략적인 내용이다. X_0 을 X 의 그 원소들 a 의 집합이라 하자. ($s(a)$ 와 $s(b)$ 가 유사한 Y 의 원소 b 가 존재하는) X_0 의 각각의 a 에 대해, Y 의 b 에 대응하는 (유일하게 결정되는) $U(a)$ 를 쓰자. 그리고 Y_0 을 U 의 범위라고 하자. 그것은 $X_0 = X$ 이거나 X_0 이 X 의 초기 성분이고, $Y_0 = Y$ 인 것을 말한다.

[연습문제] . 정렬집합 X 의 각각의 부분집합은 X 혹은 X 의 초기성분과 유사하다. 만약 X 와 Y 가 정렬집합들이고, $X \cong Y$ 라면 (즉,X 와 Y 가 유사하다), 유사성은 X 의 각각의 부분집합의 최소상계 (least upper bounded) 를 그 부분집합의 상 (像) 의 최소상계 (least upper bounded) 로 옮긴다.

19 순서수

집합x 의 후임자(successor) 인 x^+ 가 x 와 $\{x\}$ 의 합집합으로 정의되면 ω 는 0 을 포함하고 만약 x 를 포함한다면 x 의 후임자(successor)x^+ 도 포함하는 가장 작은 집합이다. 우리가 ω 로 부터 시작해서 그것의 후임자(successor) 인 ω^+ 를 구하고 또 그것의 후임자(successor) 를 구하는 과정을 무한히 반복한다면 어떻게 될까? 다른말로 하면 ω , ω^+, $(\omega^+)^+$, $\cdots$ 등의 원소를 넘어선 다른 원소도 존재할까? 같은 관점에서 보면 ω 가 $0, 1, 2, \cdots$, 을 넘어서면 어떻게 될까?

이러한 질문들은 ω 를 포함하고,(ω 자신을 제외한) 각 원소가 ω 로부터의 후임자(successor) 생성 과정을 반복하여 얻어지는 집합 T 를 요구한다. 이러한 요구 조건들을 더욱 정확하게 충족시키기 위해 잠시 간단한 용어를 소개할 것이다. ω-후임자 함수 f 는 정의역이 자연수 n 의 전임자들로 이루어진 집합이며(다른 말로는 $\mathrm{dom} f = n$ 이라고도 한다) 다음 두가지 조건을 충족시켜야 한다. (주어진 n 이 0 이 아닌 양수일 때 $f(0) = \omega$) $m^+ < n$ 일 때, $f(m^+) = (f(m))^+$ 수학적 귀납법에 의한 간단한 증명은 각각의 자연수 n 에 대하며 정의역 n 을 가진 유일한 ω-후임자(successor) 함수 f 가 존재함을 보인다. 어떤 수가 ω 와 같거나 ω 의 후임자(successor) 생성과정으로부터 만들어졌다는 것은, 그것이 ω-후임자(successor) 함수의 치역에 속한다는 것을 의미한다. $S(n, x)$ 을 "n 은 자연수이며 x 는 정의역으로 n 을 가진 ω-후임자(successor) 함수의 치역에 속해있다" 라는 문장을 표현하는 기호라고 할 때, x 를 원소로 가지고 $S(n, x)$ 을 만족하는 집합 T 는 ω 가 0 너머에 있는한 ω 너머에 있는 집합이다.

우리는 각각의 자연수 n 에 대해 집합 $\{x : S(n, x)\}$ 를 만들 수 있다는 사실을 안다. 다른 말로 하자면 각각의 자연수 n 에 대해 x 를 포함하는 함수 $F(x)$ 가 존재하는 필요충분 조건은 $S(n, x)$ 가 참이어야 한다는 것이다. n 과 $F(n)$ 사이의 관계는 함수의 관계처럼 보인다. 하지만 지금까지 우리가 보아왔던 집합 construction 에 있어서의 그 어떤 방법들도 (n, x) 를 포함하는 순서쌍의 집합인 함수 F 가 존재하는 필요 충분 조건이 x 가 $F(n)$ 에 포함된다는 사실임을 충분히 증명할 수 없었다. 이러한 명백하고 호감이 가는 상황을 이루기 위해서 우리는 집합론의 공리가 하나더 필요한데 이는 집합의 원소를 가지고 할 수 있는 가장 현명한 일은 집합을 만들어내는 것이라고 강하게 주장하고 있다.

공리 [치환의 공리] 만약 $S(a, b)$ 가 "집합 A 의 각각의 원소a 가 집합$\{b : S(a, b)\}$ 을 형성할 수 있다" 라는 의미라면, A 의 각 원소 a 에 대하여, $F(a) = \{b : S(a, b)\}$ 가 성립하는 함수 F 가 존재한다.

$\{b : S(a, b)\}$ 가 만들어 질 수 있는다는 말은 물론 b 를 포함하는 함수 $F(a)$ 가 존재하는 필요 충분 조건은 $S(a, b)$ 가 참이어야 한다는 것을 의미한다. 외연(extension) 의 공리 (기호가 표현하는 가치나 속성) 은 치환의 공리로 표현되어지는 함수는 주어진 집합과 주어진 문장에 의해 유일하게 결정된다는 사실을 의미한

다. 그 공리의 이름은 원래 집합의 원소를 새 것으로 치환함으로써, 원래 집합으로부터 새 집합을 만들 수 있다는 데에서 비롯되었다.

치환의 공리는 자연수 너머의 수를 세는 과정을 확장시키는데 중요하게 적용된다.현재의 관점으로 보면 자연수가 가진 중요한 성질은 각각의 원소로 인해 결정되는 초기의 부분(initial segment)은 바로 그 원소와 같은 잘 정렬된(well-ordered) 집합이라는 것이다. (주의: m과 n이 자연수라면 $m < n$라는 것은 $m \in n$을 의미한다.; 이것은 $\{m \in \omega : m < n\}$을 의미한다) 이것은 확장된 숫자 세기 과정에 기초한 성질이다. 이러한 아이디어의 토대가 되는 정의는 von Neumann에 기인한다. 서수는 정렬(well-ordered) 집합 α : 집합α에 있는 모든 ξ 에 대하녀 $s(\xi) = \xi$이다; 여기서 $s(\xi)$는 앞서 말한 초기 부분(initial segment) $\{\eta \in \alpha : \eta < \xi\}$ 이다.

자연수가 아닌 서수의 예로는 모든 자연수들로 이루어진 집합 ω이 있다. 이는 우리가 전에 셌던 것보다 이미 더 많이 셀 수 있다는 사실을 의미한다. 반면에 이전 우리가 처리할 수 있던 유일한 숫자들은 ω의 원소들이었지만 지금은 ω 전체를 처리하는 것이 가능하다. 우리는 또한 후임자(successor) 인 ω^+ 도 알 수 있다. 이 집합은 명백한 방식으로 정렬되어 있는 데다가 서수에게 강요되는 정렬공리(well-ordered property)도 만족시킨다. $\xi \in \omega^+$ 라면, $s(\xi) = \omega$의 경우에는 후임자의 정의에 의해 $\xi \in \omega$이고, $\xi \in \omega$의 경우에는 순서의 정의에 의해 $\xi = \omega$ 되어 결국 $s(\xi) = \xi$이 된다. 앞서 보여진 논쟁은 꽤 일반적이다. 그것은 α가 서수라면 α^+ 도 서수라는 것이다. 그것은 또한 우리가 숫자를 세는 과정이 ω와 ω의 후임자(successor) 인 ω^+, 이의 후임자인 $(\omega^+)^+$ 등 후임자(successor) 과정인 무한히 한 결과들을 포함하는 단계까지 확장되었음을 보인다.

이러한 점에서 우리는 ω 너머에 어떤 일이 일어 날지에 대한 논의와 마주치게 된다. 치환 공리는 "$F(0) = \omega$, 각각의 자연수 n에 대하여 $F(0) = \omega$" 인 함수 F가 유일하게 존재한다는 것을 내포한다. 이 함수의 치역은 우리에게 흥미로운 집합이다.; 집합에서 더 중요한 것은 함수 F의 치역을 가진 집합ω 의 합집합이다. 우리가 서수의 계산에 대해서 살펴보면서 생기는 여러가지 이유로 인해 ω 의 합집합은 보통 $\omega 2$로 표현된다. 만약 서수의 계산에서 표현(notation)을 빌려와서 우리는 $F(n)$을 $\omega + n$라고 쓴다면 우리는 집합 $\omega 2$를 모든n(with n in ω)과 n+ω (ω의 n)으로 이루어진 집합으로 표현된다. 지금 $\omega 2$가 서수라는 사실은 쉽게 증명된다. 물론 증명은 $\omega 2$에서 위수(order)의 정의를 따른다. 여기서 증명과 정의는 독자의 몫으로 남겨둔다. 우리의 공식적인 집중은 $\omega 2$에 대한 쉽고 특별한 예들을 바탕으로 한 사실들을 포함하는 일반적인 관찰로 돌리도록 한다.

집합 X의 위수(부분적 혹은 전체)는 이것의 절편(initial segment)에 의해 유일하게 결정된다. 다른 말로 하면 만약 X 안에서 R과 S가 위수(order)이고, 집합X 의 원소 x에 대해 x의 R-앞의원소(predecessors)들의 집합은 x의 S-앞의원소(predecessors)들의 집합과 같다면, R과 S는 같다. 이런 주장은 앞의원소(predecessors)들이 정밀한 조건에서 취해진 것이던 아니던 명백한 사실이다. 이

주장은 특별이 정렬 (well-ordered) 집합에서 적용된다. 이러한 특별한 경우로부터 우리는 만약 서수를 만들기 위한 정렬집합이 조금이라도 가능하다면 그 방법은 유일하다는 사실을 유추할 수 있다. 그 집합 만이 서수를 만들기 위한 관계가 어때야만 하는지 알려주고 있다. 그 관계가 요구조건을 만족시킨다면 그 집합은 서수이고 만족시키지 않는다면 아닐 것이다. $s(\xi) = \xi$ 이란 말은 ξ 의 앞의원소 (predecessors) 들이 ξ 의 원소여야만 한다는 것을 의미한다. 그러므로 질문에서의 관계는 간단히 그 속해있는 것 (belongings) 의 관계이다. 만약$\eta < \xi$ 라는 것을 [η 와ξ 가 집합 α 의 원소이면 $\eta \in \xi$] 라고 정의한다면 결과는 'α 가 α 안의 각 ξ 에 대하여 $s(\xi) = \xi$ 를 만족시키는 정렬집합 α 이며 α 는 한 경우에 있어서 서수이고 다른 경우에서는 아니다.' 또는 그렇지 않다는 것이다.

우리는 서수의 첫번째 부분에 관한 이름을 언급함으로 서수에 대한 예비 논의의 결론을 내렸다. 0,1,2,$\cdots$ 에 이어 ω 가 나오고 $\omega + 1, \omega + 2,\cdots$ 에 이어 $\omega 2$ 가 나온다. $\omega 2 + 1$(즉 $\omega 2$ 의 뒤의 원소) 의 뒤에 $\omega 2 + 2, \omega 2 + 3$ 이 나온다.; 결국 이 모든 순서들은 $\omega 3$ 으로 다가간다.(다른 치환 공리의 적용이 이부분에서 필요하다) 그다음은 $\omega 3 + 1, \omega 3 + 2, \omega 3 + 3,\cdots$ 그리고 그 다음은 $\omega 4$ 로 간다. 이런 방법으로 우리는 계속적으로 $\omega, \omega 2, \omega 3, \omega 4,\cdots$ 등을 얻는다. 치환 공리의 적용은 ω 가 자연수를 따라가는 것과 같은 원리로 ω^2 을 산출하게 된다. 그 다음에 모든 것들을 다시 시작하게 될 것이다: $\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \omega^2 + 3, \cdots, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \omega^2 + \omega + 2, \cdots, \omega^2 + \omega 2, \omega^2 + \omega 2 + 1, \cdots, \omega^2 + \omega 3, \cdots, \omega^2 + \omega 4, \cdots, \omega^2 2, \cdots, \omega^2 3, \cdots, \omega^3, \cdots, \omega^4, \cdots, \omega^\omega, \cdots, \omega^{(\omega^\omega)}, \cdots, \omega^{(\omega^{(\omega^\omega)})}, \cdots$. 결국 다음에 오는 수는 ε_0 가 된다. 그리고 그 다음에는 $\varepsilon_0 + 1, \varepsilon_0 + 2, \cdots, \varepsilon_0 + \omega, \cdots, \varepsilon_0 + \omega 2, \cdots, \varepsilon_0 + \omega^2, \cdots, \varepsilon_0 + \omega^\omega, \cdots, \varepsilon_0 2, \cdots, \varepsilon_0 \omega, \cdots, \varepsilon_0 \omega^\omega, \cdots, \varepsilon_0^2, \cdots\cdots\cdots$.

20 sets of ordinal numbers 서수의 집합

정의에 따르면, 서수는 정렬집합의 특별한 종류이다; 우리는 그것의 특별한 성질을 고찰하기 시작한다.

어떤 서수 α 의 각 원소가 동시에 α 의 부분집합인 것은 가장 기본적인 사실이다. (바꿔 말하면, 모든 서수는 이행집합 (transitive set) 이다.) 다시 한 번 말하자면, $\xi \in \alpha$ 라면, $s(\xi) = \xi$ 라는 사실은 ξ 의 각 원소는 α 에서 ξ 의 전임자 (predecessor) 이고, 더 나아가서 특히 α 의 원소라는 것을 의미한다.

ξ 가 서수 α 의 원소라면, 방금 봤던 것처럼, ξ 가 α 의 부분집합이고, 결론적으로 ξ 는 정렬집합이다 (α 로부터 받은 정렬을 고려해서). 단언: 결국 ξ 는 서수이다. 실제로, $\eta \in \xi$ 이면, ξ 의 η 에 의해 결정되는 초기부분 (initial segment) 은 ξ 의 η 에 의해 결정되는 초기부분과 같다; 후자가 η 과 같으므로, 전자도 같다. 같은 결과를 나타내는 또다른 방법은 서수의 모든 초기부분이 서수라고 말하는 것이다.

다음으로 언급할 것은 두 개의 서수가 유사하면, 그것들이 같다는 것이다. 이것을 증명하기 위해, α 와 β 는 서수이고, f 는 α 에서 β 로의 유사상이라고 가정하자; α 의 각 ξ 에 대하여 $f(\xi) = \xi$ 임을 보일 것이다. 증명은 직접 초한귀납법이다. $S = \{\xi \in \alpha : f(\xi) = \xi\}$ 라고 하자. α 의 각 ξ 에 대하여, $s(\xi)$ 에 속하지 않는 α 의 가장 작은 원소는 ξ 그 자신이다. f 는 유사상이므로, f 에서 $s(\xi)$ 의 상에 속하지 않는 β 의 가장 작은 원소는 $f(\xi)$ 이다. 이 단언들은 $s(\xi) \subset S$ 이면, $f(\xi)$ 와 ξ 는 같은 절편을 가지는 서수이고, 더 나아가 $f(\xi) = \xi$ 라는 것을 의미한다. 증명하였으므로 $s(\xi) \subset S$ 이면 언제나 $\xi \in S$ 이다. 초한귀납법의 원리는 $S = \alpha$ 이면, 그것은 $\alpha = \beta$ 을 의미한다는 것이다.

α 와 β 가 서수라면, 특히 그것들이 정렬집합이라면, 결과적으로 그것들은 모두 유사하거나 그 중 하나는 다른 것의 초기부분과 유사하다. β 가 α 의 초기부분과 유사하다면, β 는 α 의 원소와 유사하다. α 의 모든 원소가 서수이므로, β 는 α 의 원소이거나 바꿔 말하면 α 는 β 의 연장이다. 이제 우리는 α 와 β 가 서로 다른 서수라면,

$$\beta \in \alpha,$$

$$\beta \subset \alpha,$$

$$\alpha \text{는 } \beta \text{의 연장},$$

위 말들은 각각이 서로 동치관계에 있다는 것을 안다; 저것들이 유지될 때, 우리는 아래와 같이 말한다.

$$\beta < \alpha.$$

우리가 방금 증명한 것은 어떤 두 개의 서수들이라도 비교할 수 있다는 것이다; 즉, α 와 β 가 서수라면, $\beta = \alpha$, 혹은 $\beta < \alpha$, 혹은 $\alpha < \beta$ 이다.

위 문단의 결과는 서수의 모든 집합은 전적으로 배열될 수 있다고 표현될 수 있다. 사실, 이것이 더 사실이다: 서수의 모든 집합은 정렬될 수 있다. E가 서수의 공집합 아닌 집합이라 가정하고, α가 E의 원소라고 하자. E의 모든 β에 대하여 $\alpha \leqq \beta$라면, α는 E의 첫번째 원소이고 전부 좋다. 그러한 경우가 아니라면, $\beta < \alpha$, 즉 $\beta \in \alpha$인 E의 원소 β가 존재한다; 바꿔 말하면, $\alpha \cap E$는 공집합이 아니다. α가 정렬집합이기 때문에, $\alpha \cap E$는 α_0이라는 첫번째 원소를 갖는다. $\beta \in E$라면 $\alpha \leqq \beta$ ($\alpha_0 < \beta$일 때) 이거나 $\beta < \alpha$ ($\beta \in \alpha \cap E$이므로 $\alpha_0 \leqq \beta$일 때) 이고, 이것은 E가 α_0이라는 첫번째 원소를 갖는 것을 증명한다.

몇몇 순서수 (서수) 는 유한하다. 그것들은 단지 자연수이다.(즉 w의 원소) 나머지는 초한의 수 (*transfinite*) 라고 부른다. 모든 자연수의 집합 w는 가장 작은 초한 순서수이다 각각의 유한한 순서수는 (0을 제외한) 하나의 바로 앞 원소를 갖는다. 만약 초한순서수 α가 바로 앞 원소 β를 갖는다면 단지 자연수에 대해서 $\alpha = \beta+$이다. 모든 초한순서수가 바로 앞 원소를 갖는 것은 아니다. 그렇지 않은 것들은 극한수 (*limit numbers*) 라고 부른다.

이제 C가 순서수들의 모임이라고 가정하자. C는 연속연쇄 (continuation chain) 이기 때문에 이것은 다음을 따른다 집합C의 α에 대한 합집합은 C의 모든 ξ에 대한 잘 정돈된 집합이다. α자체와는 별개인 α는 ξ의 연속이다. α안의 한 원소에 의해 결정되는 절편 (initial segment) 은 원소 (집합 C안에서 일어나는 무엇이든) 에 의해 결정되는 절편과 같다. ; 이것은 α가 순서수라는 것을 암시한다. 만약 $\xi \in C$라면, $\xi \leqq \alpha$; 수 α는 C의 원소의 상계이다. 만약 β가 C의 또다른 상계이면 $\xi \in C$인 언제라도 $\xi \subset \beta$이다. 그러므로 합집합의 정의에 의해 $\alpha \subset \beta$이다. 이것은 α가 C의 최소의 상계라는 것을 암시한다.; 그러므로 우리는 순서수의 모든 집합은 상한 (최소상계) 을 갖는다는 것을 증명했다.

완전히 모든 순서수로 구성된 집합이 존재하는가? 이것의 답은 '아니다' 여야만 한다는 것을 알기 쉽다. 만약 이런 집합이 존재한다면 우리는 모든 순서수의 상한을 형성할수 있다. 그 상한은 모든 순서수보다 더 크거나 같은 순서수일것이다. 하지만, 각각의 순서수에 대해 엄격히 더 큰 하나가 존재하기 때문에 (예를 들어 그것의 뒤에오는것) 이것은 불가능하다. 모든 서수의 집합이라 말하는 것은 이치에 맞지 않는다. 이러한 "집합" 이 존재한다는 가정에 기반한 그 모순은 *Burali-Fori* 역설 이라고 부른다. (Burali-Forti는 두명이 아니라 한명의 남자이다.)

우리의 목적은 한 순서수는 그것이 보여주는것만큼 특별하지 않다는 개념을 보이는 것이다. 그리고 사실 각각의 잘 정돈된 집합은 모든 필수적인 측면에서 몇몇의 순서수와 닮았다. 여기서 "닮았다" 는 것의 의미는 유사성의 기술적인 느낌에서이다. 결과에 대한 비공식적인 진술은 각각의 잘 정돈된 집합이 세어질수 있다는 것이다.

정리 5 (counting 정리) 각각의 잘 정돈된 집합은 유일한 순서수와 유사하다.

(증명) *abc*순서수의 유사성은 동등 (등호)과 같기 때문에 유일함은 명백하다. 이제 X 는 잘 정돈된 집합이라 가정하고 몇몇의(반드시 유일한) 순서수와 유사한 각 a 의 앞 원소에 의해 결정되는 절편과 같은 X 의 원소 a 를 가정한다. 만약 $S(x, \alpha)$ 가 "α 는 하나의 순서수이고 $s(x) \cong \alpha$"라는 것을 말하는 문장이라면 $s(a)$ 에 있는 각 x 에 대해서 집합 $\{\alpha : S(x, \alpha)\}$ 는 형성되어질수 있다. 사실 그 집합은 원소가 하나인 집합이다. 대입의 공리는 엄밀하게 a 의 앞 원소에 의해 결정되는 절편과 유사한 순서수로 구성된 집합의 존재를 내포한다. a 는 그것의 앞 원소 중 하나의 바로 앞원소 이든지 모든 그것들의 상한이든지, 이는 $s(a)$ 는 순서수와 유사하다는 것을 따른다. 이 논의는 초한의 귀납법 원칙의 적용에 대한 방법을 준비한다; 그 결과는 X 에서 각각의 절편은 몇몇의 순서수와 유사하다는 것이다. 다시말해 이 사실은 대입의 공리의 다른 적용을 정당화한다. 위에서 만든것과 같이; 희망했던 대로 최종적인 결론은 X 는 몇몇의 순서수와 유사하다는 것이다.

21 순서수의 셈

우리는 자연수에 산술연산을 정의하기 위해 순환이론을 사용한다. 그 결과로서 우리는 다양한 방법으로 집합론의 연산이 이 순환이론과 관련이 있다는 것을 증명할 수 있다. 예를 들어 셀 수 있고 공통원소를 갖지 않은 두 집합의 합집합의 원소의 개수는 두 집합의 원소의 개수의 합이다. 여기서 우리는 이 사실이 더하기 연산을 정의하는데 사용해 왔을 수도 있다는 것을 알수있다. 만약 공통원소가 없는 두 유한집합 E, F가 있는데 원소의 개수를 각각 $n(E) = m, n(F) = n$이라 하자. 그러면 자연수 m과 n의 합은 $n(E \cup F)$으로 정의해 왔을 수 있다.

자연수에 관해 행해진 여러 가지 연구결과 관련해서 서수에 쓰이는 더하기 곱하기 멱법에 접근하는 두 가지 기본 관점이 있다. 우리는 순환적인 관점보단 집합론 관점을 더 강조하고자 한다. 왜냐하면 다양함의 추구를 위해서이기도 하고 부분적으론 이 문헌에서 순환이 덜 자연스럽게 보이기 때문이다.

우리는 새로운 정렬집합을 만드는데 있어 두 개의 정렬집합을 같이 놓는 다소 명확한 방법이 있다는 것을 지적하면서 시작해 보겠다. 비공식적 (약식) 으로 말하는 그 방법은 두 개 중 한 개의 집합을 적고 그 옆에 나머지집합을 적는다는 것이다. 만약 우리가 좀 더 정밀하게 따져보면 우리는 바로 두 개의 집합이 공통원소가 있을 경우에 직면하게 된다. 언제 우리는 두 개의 집합의 공통원소를 적어야 할까? 이 문제를 해결하는 방법은 두 집합을 공통원소가 없게끔 만드는 것이다. 이것은 각각의 원소에 다른 색깔을 칠하면 된다. 좀 더 수학적으로 말하자면, 각각의 집합에 다른 물체를 사용함으로써 두 집합의 같은 원소를 구별되는 물체로 바꾸는 것이다. 완전히 수학적으로 표현하자면 임의의 집합 E, F가 있다고 치자.

$\hat{\{E\}} = \{(x,0) | x \in E\}, \hat{\{F\}} = \{(x,1) | x \in F\}$ 이라고 하면 두 개의 집합은 공통원소가 없게 된다.

E와 $\hat{\{E\}}$ $(x \to (x,0))$ 일대일 대응관계를 가지고 F와 $\hat{\{F\}}$ $(x \to (x,1))$ 역시 일대일 대응관계를 가진다.

이런 상응은 E와 F의 어떤 구조라도 (예를 들어 순서) $\hat{\{E\}}$와 $\hat{\{F\}}$를 가질 수 있다는 것을 보이는데 사용될 수 있다. 이것은 언제든지 두 개의 집합이 있다면 추가적인 구조가 있든 없든 항상 두 개의 집합을 공통원소가 없는 같은 구조의 집합으로 만들 수 있다는 것을 나타낸다. 그러므로 우리는 일반적으로 처음부터 두 개의 집합이 공통원소가 없다고 가정할 수 있다.

이 위의 전개를 서수계산에 적용하기 전에, 우리는 임의의 집합의 부분집합에서도 일반화 시킬 수 있다는 사실을 알 수 있다. 만약 $\{\hat{\{E\}}_i\}$가 family라면 $\hat{\{E\}}_i = \{(x,i) | x \in E_i\}$ (다른 말로 $\hat{\{E\}}_i = \hat{\{E\}}_i \times \{i\}$)이다. family $\{\hat{\{E\}}_i\}$은 서로 배반관계에 있고 원래의 family $\{E_i\}$가 할 수 있는 모든 것을 할 수 있다.

공통 원소가 없는 정렬집합 E와 F가 있다고 하자. $E \cup F$의 순서를 정의해서 E의 원소들의 쌍과 F의 원소들의 쌍이 그들이 가지고 있는 순서를 얻도록 하자.

그리고 E 의 각각의 원소들은 F 의 각각의 원소들보다 앞에 있게 하자. (매우 형식적인 언어로 표현하면: 만약 R 과 S 가 각각 E 와 F 에 주어져 있는 순서관계라면, $E \cup F$ 에 $R \cup S \cup E \times F$ 이라는 관계로 순서를 주자.)

집합 E 와 F 가 잘 정렬되었다는 것은 집합 $E \cup F$ 또한 잘 정렬되었다는 것을 뜻한다. 정렬집합 $E \cup F$ 를 정렬집합 E 와 F 의 순서합이라 부른다.

순서합의 개념을 무한하게 많은 summands(피가수: 덧셈에 있어서의 제 1 항)로 확장시킬 수 있는 쉽고 좋은 방법이 있다. $\{E_i\}$ 를 공통원소가 없는 정렬집합 I 의 첨수집합들의 family 라고 가정하자. 그러면 family 의 순서합은 합집합 $\bigcup_i E_i$ 로 나타낼 수 있다. 만약 a 와 b 가 그 합집합의 원소이고 $a \in E_i, b \in E_j$ 라면 $a < b$ 는 $i < j$ 또는 $i = j$ 를 의미하고 E_i 안에서 a 의 순서가 b 의 순서보다 앞에 있다는 것을 의미한다. 이제 서수의 더하기의 정의는 아이들의 놀이에 불과하다. 정렬집합 X 에 대해서, $ordX$ 를 X 와 닮은꼴의 특정한 서수라고 하자. (만약 X 가 유한집합이라면 $ordX$ 는 원래 정의 되어있던 X 의 원소의 개수와 같다.) 만약 α 와 β 가 서수이고, $ordA = \alpha, ordB = \beta$ 가 되는 공통원소가 없는 정렬집합 A 와 B 가 있으며, 집합C 를 A와B 의 순서 합이라고 하게 되면 α 와 β 의 합은 정의에 의해서 C 의 서수가 된다. 즉 $ordA + ordB = ordC$ 가 된다. α 와 β 의 합이 어떤 집합 A 와 B 를 골라도 상관없이 독립적이라는 것이 중요하다. 즉 어떤 집합 두 개를 골라도 서수만 같다면 같은 결과를 얻는다는 것이다.

이런 생각은 무한한 경우에도 어렵지 않게 확장 시킬 수 있다.

만약$\{a_i\}$ 가 정렬집합 I 에 의해 색인된 서수들의 정렬집합이며, $\{A_i\}$ 를 각각의 i 에 대해 $A_i = a_i$ 를 만족시키는 공통원소를 갖지 않는 정렬집합으로 두고, A 가$\{A_i\}$ 의 서수 합이라고 하면 정의에 의해서 $\sum_{i \in I} ordA_i$ 는 A 의 서수가 되므로 $\sum_{i \in I} ordA_i = ordA$ 가 된다. 마찬가지로 여기서도 결과는 정렬집합 A_i 의 어떤 선택에도 독립적이다. 즉 A_i 의 서수만 같다면 합의 결과는 같다.

서수합의 성질은 몇몇 장점과 단점을 가지고 있다. 장점은 항등원

$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$0 + \alpha = \alpha$$

$$\alpha + 1 = \alpha^+,$$

과 결합법칙 이다.

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

마찬가지로 $\alpha < \beta$ 라는 것은 다음의 식 $\beta = \alpha + \gamma$(γ 은 0 이 아닌 서수)을 만족하는 γ 가 존재한다는 것과 동치이다. 위의 명제들의 증명은 간단한 것이다.

대부분의 덧셈계산 실수는 교환법칙을 잘못 사용하면서 나온다. 실례: $1+\omega = \omega$(그러나 위에서 보았듯이 $\omega + 1 \neq \omega$). 잘못된 덧셈계산 직각적으로 명확한 정렬

에 대한 사실을 표시한다. 예를 들어 만약 무한수열 앞에 새로운 원소를 추가한다면 결과는 시작한 것과 유사하게 될 것이지만 새 원소를 마지막에 넣는다면 유사성을 잃게 될 것이다.; 앞의 집합은 마지막 원소가 없지만 새로 만든 집합은 마지막원소를 갖게 된다.

무한 합은 곱셈을 편하게 하려는 목적으로 쓰인다. A, B 가 잘 정렬된 집합이라면 그들의 곱을 A 를 B 번 더한 결과로 정의할 수 있다. 이를 이해하기 위해선 우선 집합 B 로 색인된 A 와 유사한 각각의 공통집합이 없는 정렬집합족들을 만들어야 한다. 이에 대한 일반적인 규칙은; B 안에 있는 각각의 원소 b 에 대해 $A_b = A \times \{b\}$ 로 둔다. 만약 이때 서수합의 정의를 집합족 $\{A_b\}$ 를 사용해서 조사한다면 다음과 같은 정의를 이끌 수 있다. 잘 정렬된 집합 A 와 B 의 서수곱은 사전편찬식의 반대로 정렬된 Cartesian product $A \times B$ 이다. 다시말하면 (a, b) 와 (c, d) 가 $A \times B$ 에 있다면, $(a, b) < (c, d)$ 는 $b < d$ 이거나 $b = d, a < c$ 임을 뜻한다.

만약 α 와 β 가 서수라면 A 와 B 를 $ordA = \alpha$ 이고, $ordB = \beta$ 인 정렬집합으로 두고 C 를 A 와 B 의 서수곱 결과라고 하자. 곱 $\alpha\beta$ 는 정의에 의해 C 의 서수가 되고 그래서 $(ordA)(ordB) = (ordC)$ 가 된다. 이 결과는 정렬된 임의의 집합 A, B 와는 독립적으로 명확하게 정해져있다. 서수가 α 인 가장 쉽게 사용될 수 있는 정렬집합이 서수 α 그 자체라는 것을 상기할 때에도 정렬집합이 명확히 정해져 있음을 알 수 있다.(또 β 에 대하여도 마찬가지이다.) 덧셈과 마찬가지로 곱셈도 각기 장점과 단점이 있다. 그 장점 중 하나가 항등식이다.

$$\begin{aligned} \alpha 0 &= 0, \\ 0\alpha &= 0, \\ \alpha 1 &= \alpha, \\ 1\alpha &= \alpha, \end{aligned}$$

결합법칙

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

왼쪽 분배법칙

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma,$$

그리고 두 서수 곱이 0 일 때는 둘 중 하나가 반드시 0 이어야 한다. (덧셈보다 곱셈이 우선연산자라는 약정을 이용한다는 것에 주의하여라.; $\alpha\beta+\alpha\gamma$ 는 $(\alpha\beta)+(\alpha\gamma)$ 임을 의미한다.)

곱셈에서 교환법칙은 성립하지 않는다. 따라서 그 결과들도 상당수가 일치하지 않는다. 예를들어 $2\omega = \omega$(정렬쌍으로 된 무한수열을 생각해라) 이나, $\omega 2 \neq \omega$ 이다. (무한수열의 정렬쌍을 생각해라.). 오른쪽 분배법칙또한 성립하지 않는다.; 즉 $(\alpha+\beta)\gamma$ 가 일반적으로는 $\alpha\gamma+\beta\gamma$ 와 같지 않다는 것이다. 예: $(1+1)\omega = 2\omega = \omega$

이나 $1\omega + 1\omega = \omega + \omega = \omega 2$ 이다.

반복되는 덧셈이 서수곱의 정의가 되는 것처럼 반복된 곱은 지수의 정의가 될 수 있다. 다른말로, 지수는 초한귀납법에 의해 접근될 수 있다. 정확한 사항은 광범위하고 매우 전문화된 서수 이론에 있다. 여기서 우리는 정의를 조금이나마 알 수 있고, 간단한 결과를 언급할 수 있다는 것에 만족하려한다. α^β 를 정의하기 위해선 $(\alpha, \beta$ 는 서수) 초한귀납법의 정의 (β 에 관한) 를 사용해야한다. 먼저 $\alpha_0 = 1$ 이고 $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha$ 이므로 ; β 가 극한이라면, α^β 를 α^γ 형태로 된 수 중 상한으로 정의한다. 단 $\gamma < \beta$. 이러한 대략적인 정의들이 조직화되면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&0^\alpha = 0(\alpha \geq 1),\\
&1^\gamma = 1,\\
&\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma,\\
&\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma.
\end{aligned}
$$

익숙한 지수법칙 모두가 성립하지는 않는다.; 예를들어, $(\alpha\beta)^\gamma$ 은 일반적으로 $\alpha^\gamma\beta^\gamma$ 와 다르다. 예 :$(2 \cdot 2)^\omega = 4^\omega = \omega$, 그러나 $2^\omega \cdot 2^\omega = \omega \cdot \omega = \omega^2$.

주의 : 서수에서의 지수표시법은 앞서 우리가 알고 있던 것과는 일치하지 않는다. ω 에서 2 로 가는모든 함수들의 정렬되지 않은 집합 2^ω 와 서수 수열 $2, 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 2$ 의 상한인 정렬집합 는 전혀 다른 것이다.; 이것은 어쩔 도리가 없다. 이들의 수학적인 사용은 두 개 영역에서 명확하게 정립되어있다. 특정경우에 문맥이 두 영역의 해석 어디에도 들어맞지 않는다면 명확한 지시가 주어져야 한다.