1. 극한이란?

대학교 미적분학 교과서를 보면서 고등학교 교과서와 다른 점을 들라면 증명을 많이 한다는 것과 직관적으로 이해되는 것도 꼭 증명을 하고 나간다는 것이다. 증명이 많다는 것은 배우는 것이 많다는 것이라고 생각하면 된다. 그러나 왜 고등학교 때는 그냥 몇 가지 예를 가지고 설명하고 지나갔던 것은 굳이 증명하려고 하는가?

이것은 많은 생각을 필요로 하는 문제이지만 간단히 결론만 이야기하면 우리가 미적분학을 공부하여 사용하고자 하는 목적이 고등학교 때보다 훨씬 넓고 깊다는 말로 설명할 수 있다.[1]

이러한 예를 처음 공부하는 것으로 보통 극한의 정의를 사용한다. 첫째 장의 이야기는 아마도 이 노트의 읽을거리 가운데서 가장 어려운 부분일 것이다. 실제로 여기서 다루는 $\epsilon-\delta$ 또는 $\epsilon-N$ 논법은 대학을 졸업할 때까지도 힘들어하는 사람이 많은 부분이다. 그러나 우리는 이것을 누구나 받아들일 수 있도록 천천히 생각할 수 있게 나누어 놓았다. 끈기만 있으면 어렵지 않다는 것을 보여주려고 한다.

첫 번째 해 보려고 하는 것은 수열의 극한의 정의이다. 이 극한의 정의를 분석하고, 분해하여 좀 느낌이 오게 만들어 보았으면 하는 것이다.

예를 들어 "실수의 수열 $\{a_n = 2-1/n\}$ 이 2 에 수렴한다" 고 할 때, 우리는 무슨 말을 하고 싶은 것인가? 고등학교 때 식으로 실수 a_n 이 2 로 무한히 가까워진다는 말은 별로 좋은 표현이 아니라는 것은 이미 설명을 들었을 것이다. a_n 이 2 로 무한히 가까워진다면 a_n 은 3 으로도 무한히 가까워진다. 맞는가? 그렇다는 사람도 있고 아니라는 사람도 있을 것이다. 이러한 혼돈의 원인은 "무한히" 라는 단어에 있다. 위에서와 같이 쓰면 "무한히" 라는 말이 무슨 뜻인지 별로 확실하지가 않다. 사람에 따라서 제멋대로 해석하게 되며 어떤 사람은 옳다, 어떤 사람은 틀리다고 주장해도 해결할 방법이 없게 된다. (이것이 고등학교에서 공부한 극한이 갖는 한계이다.)

그러면 어떻게 해야 할까? 이 문제를 처음으로 깊이 있게 분석한 사람은 프랑스의 위대한 수학자 Cauchy(코–시, 1789 ~ 1857) 이다. 코–시가 어떤 생각을 했었는가는 지금 잘 알 수 없다. 그러나 우리 나름대로의 가정과 생각으로 그가

[1] 고등학교에서 공부하는 내용은 일상적인 문제를 해결하는 데에는 크게 부족하지 않다. 그러나 대학교의 공부 내용은 이후의 전공연구를 목표로 하고 있고 각각의 전공에서 맞부닥치는 문제들은 일상적인 문제가 아닐 때가 많다. 이런 문제를 해결하려면 일상적인 계산이 성립하는 가능한 최대한의 이론을 알거나, 일상적인 계산법이 성립하지 않는 경우의 현상을 이해하는 것이 필요하다. 이를 제대로 하려면 당연히 계산법 자체의 의미를 잘 이해하고 있지 않으면 안 된다.

만든 극한의 정의를 우리도 만들 수 있는가를 시험해 보려고 한다. 이를 위하여서는 논리로 무장을 잘 해둘 필요가 있다.

이에 필요한 논리는 이 장의 마지막에 정리하여 둔다.

우선 수열 $\{a_n\}$ 이 0 에 수렴한다면 어떤 경우에 수렴한다고 말하는가? 수열 $\{1/n\}$, $\{-1/n\}$ 또는 $\{(-1)^n/n\}$ 과 같은 것들은 모두 0 으로 수렴한다고 해도 좋은 수열들이다. 한편 $\{1 + (1/n)\}$ 과 같은 수열은 0 으로 무한히 가까이 간다고 할 수는 있겠지만, 1 로는 수렴해도 0 으로 수렴한다고 하고 싶지는 않다. 여기서 알 수 있는 것은 수열이 수렴하려면 우선 수열의 항 a_n 과 극한이 될 0 과의 차이가 매우 작아야 한다는 것을 알 수 있다. (매우 작다는 말도 조금은 애매한 말이다.) 실제로 수열이 매우 복잡한 변화를 보일 때 수렴하는가 아닌가를 생각하는 것은 쉽지 않은 작업이다.

이제 수열 $a_n = 1/n$ 이 있을 때, 다음과 같은 수열 b_n 을 생각하여 보자. b_n 은 처음에는 a_1 에서 시작하여 a_n 과 똑같이 0 을 향하여 나아간다. 그러다 10 항에 이르면, 다시 되돌아와서 a_1 에서부터 다시 시작한다. 즉 이 수열의 제 11 항 b_{11} 은 a_1 과 같고, 제 12 항 b_{12} 는 a_2 와 같다는 식이다. 그리하여 다시 100 개의 항을 나아간다. 즉, b_{110} 은 a_{100} 과 같다, 그리고 111 항 b_{111} 은 다시 a_1 으로 되돌아와서 a_n 을 따라 1000 개의 항을 나아간다.

$$\{b_n\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{1000}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{1000}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{10000}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{100000}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots\}$$

이런 식으로 되풀이하여 만들어진 수열 $\{b_n\}$ 은 0 으로 수렴하는가? 비록 $\{b_n\}$ 이 0 을 향하여 열심히 그리고 무한히 (?) 가까이 가고 있지만 0 으로 수렴하지는 않는다. 이 수열에서 보면 b_{11} 은 1 이고 b_{111} 도 1 이고, b_{1111} 도 1 이다. 이런 식으로 이 수열은 한참 0 에 가까워지다가도 다시 1 로 되돌아와서 새로 시작하고 하기를 반복하게 된다. 이 수열은 비록 많은 항들이 0 에 가까워지더라도, 0 에 가깝지 않은 1 이라는 항이 11 번째, 111 번째, 1111 번째 등등 계속하여 되풀이하여 나오게 되므로 전체적으로는 0 에 수렴한다고 할 수 없다는 것이 우리가 생각하는 수렴이다.

이제 이 수열과 같은 것은 수렴하지 않는다. 즉 수렴한다의 부정이라고 하고 싶다. 그러면 수렴하지 않는 이와 같은 수열이 수렴하지 않는 근거는 무엇이라고 말할 수 있는 것인가? 우선 드는 생각은 “0 에서 1 만큼 떨어진 1 을 값으로 갖는 항이 자꾸 나오니까” 라고 말 할 수 있다. 그래서 수렴하려면 이런 일이 없어야 한다는 조건을 내세우게 된다. 즉,

0 에서 1 이상 떨어진 값을 갖는 항이 무한히 되풀이해서 나오는 수열은 0 으로 수렴하지 않는다.

라고 하기로 하자.

이제 이것이면 충분할까 하는 생각이 든다. 이에 대해서 아니요 라고 말할 수 있는 이유는 위에서 만든 수열 $\{b_n\}$ 의 반이 되는 수열 $\{b_n/2\}$ 를 생각해보면 금방 알 수 있다.

이 수열은 위에서 생각해낸 조건에 걸리지 않는다. 즉 0 에서 1 이상 떨어진 값을 갖는 항이 무한히 나오는가 하고 생각해 보면 그렇지 않다. 그러니까 "됐다 이 수열 $b_n/2$ 는 0 에 수렴하는구나" 하고 생각하면 안 된다.

왜 ?

이 수열에서는 0 에서 1 만큼 또는 그 이상 떨어진 수는 하나도 없지만, 스케일만 반으로 줄었지 아까 일어났던 일이 그대로 똑같이 일어나고 있다. 즉 0 을 향해서 잘 가다가 다시 1/2 로 되돌아오기를 계속한다. 이것도 0 으로 수렴한다고 하기에는 "별로" 이다. 이런 놈은 수렴하면 안 된다. 그러면 이것은 어떤 조건을 내세워서 제거하는가 ? 물론 앞에서와 똑같이 하면 된다. 즉,

0 에서 1/2 이상 떨어진 값을 갖는 항이 무한히 되풀이해서 나오는 수열은 0 으로 수렴하지 않는다.

를 주면된다.

자 이제 생각해 보면 위에서 나온 숫자 1/2 은 그냥 잡은 것이지 1/3 에 대하여도 똑같은 일이 일어나고, 1/100 도 그렇고, 어떤 양의 실수 ϵ 에 대하여도 마찬가지 일이 생긴다는 것을 알 수 있다. 따라서 우리가 요구하는 바는 다음과 같이 쓸 수 있다.

어떤 양수 ϵ 을 잡아보더라도 이 가운데 어떤 한 ϵ 에 대하여서만이라도 0 에서 ϵ 이상 떨어진 값을 갖는 항이 무한히 되풀이해서 나오는 수열은 0 으로 수렴하지 않는다.

이제 이 말을 잘 정리하여 보자.

임의의 ($\forall$) 실수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 (살펴보아도) $\lvert a_n - 0\rvert \geq \epsilon$ 인 n 의 개수는 무한히 많지 않다. 즉, 임의의 ($\forall$) 실수 $\epsilon > 0$ 에 대하여, $\lvert a_n - 0\rvert \geq \epsilon$ 인 n 의 개수는 유한하다.

이러한 유한개의 n($|a_n - 0| \geq \epsilon$ 인 n) 가운데 가장 큰 n 보다 하나 더 큰 자연수를 N 이라고 하자. (이런 n 의 개수가 유한하다는 말은 이러한 자연수 N 을 찾을 수 있다는 말과 똑같은 말이다.) 그러면 $n \geq N$ 이면, 이런 n 들에 대하여는 더 이상 $|a_n - 0| \geq \epsilon$ 가 아니라는 말과 같다. 즉, $n \geq N$ 인 n 들에 대하여는 항상 $|a_n - 0| < \epsilon$ 이라는 말이 된다. 그리고 이제 위의 말을 다시 한번 정리하면,

임의의 (∀) 실수 $\epsilon > 0$ 에 대하여, (위에서와 같이) 자연수 N 을 찾을 수 있어서 N 이후의 n 에 대하여는 (즉, $n \geq N$ 이면) 항상 $\|a_n - 0\| < \epsilon$ 이 된다”

라는 말이 된다는 것을 알 수 있다. 이제 남은 일은 이 말이 교과서 “미적분학과 행렬” 의 136 쪽의 수렴의 정의와 똑같다는 것을 확인하는 것이다.

처음에는 이런 복잡한 생각을 하고 나서 이런 정의를 써낸다는 것이 매우 힘들게 느껴진다. 그러나, 몇 번만 이런 생각을 되풀이하고 나면 금방 익숙해져서 별로 힘들지 않게 복잡한 정의를 다룰 수 있게 된다. 그리고 수렴을 훨씬 잘 이해하게 되었다는 느낌이 들 것이다.

실제로 수렴과 관련된 이야기를 할 때, 매 번 이런 생각을 하는 것은 아니다. 대부분의 경우에 수학자들은 수렴의 정의를 단순히 기억하는 것만으로 문제를 처리한다. 그러나 어떠한 구체적인 수렴 문제에서 특별한 수열을 잘 이해하려고 할 때는 이 수열의 항들이 이러한 뜻에서 어떻게 행동하는가를 바라봄으로써 이해한다.

이제 연습삼아 위의 말을 부정하여 보자. 즉 수렴하지 않는다는 말은 어떤 뜻인가를 생각해 보는 것이다. 이 때는 논리의 법칙을 사용하여 차근 차근 풀어나가면 된다.

위의 말은 다음과 같이 생겨 있다.

임의의 실수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 (어쩌구저쩌구) 가 성립한다.

이를 부정하면

적당한 (∃) 실수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 (어쩌구저쩌구) 가 성립하지 않는다.

가 된다. 이제 맨 앞부분의 부정을 정리하는 것은 끝났다. 남은 일은 (어쩌구저쩌구) 부분의 부정인 “(어쩌구저쩌구) 가 아니다” 를 정리하는 일이다. 이 부분은

적당한 자연수 N 을 찾을 수 있어서 (∃N) (어쩌구저쩌구 2) 이다.

이므로 부정하면

임의의 자연수 N 에 대하여 (어쩌구저쩌구 2) 가 성립하지 않는다.

이다. 따라서 전부 정리하면

적당한 (∃) 실수 $\epsilon > 0$ 을 잡을 수 있어서, 이 ϵ 에 대하여는 임의의 자연수 N 에 대하여 [$n \geq N$ 이면 $|a_n| < \epsilon$] 이 아니다.

즉, 적당한 (∃) 실수 $\epsilon > 0$ 을 잡을 수 있어서, 이 ϵ 에 대하여는 임의의 자연수 N 에 대하여 [$\forall n \geq N$ 에 대하여 $|a_n| < \epsilon$] 이 아니다.

즉, 적당한 (∃) 실수 $\epsilon > 0$ 을 잡을 수 있어서, 이 ϵ 에 대하여는 임의의 자연수 N 에 대하여 적당한 $n \geq N$ 이 존재하여 ($\exists n \geq N$) $|a_n| < \epsilon$ 이 아니다.(즉, $|a_n| \geq \epsilon$ 이다.)

이제 이 말이 맨 처음에 했던 말과 똑같다는 것을 확인하여 보자. 앞에서 만들었던 수열 $\{b_n\}$ 은 0 으로 가까워지다가 다시 1 로 되돌아오는 일을 자꾸 되풀이하는 수열이다. 이 수열에 대하여 위의 명제를 확인하려면 ϵ 을 0.5 정도로 잡아주면 충분하다. (즉, "적당한 양의 실수 $\epsilon = 0.5$ 를 잡을 수 있어서" 가 된다.) 그러면 임의의 자연수 N 을 잡아 놓고 보아도 그 N 보다 더 큰 (뒤쪽에 있는) n 가운데 b_n 이 다시 1 로 돌아오는 놈이 있게 마련이고, 이 때, b_n 이 너무 크게 된다 즉, $|b_n - 0| = 1 \geq 0.5$ 가 된다. (이 이야기가 시작점이다.)

지금 까지 한 이야기는 교과서 136 쪽에서 138 쪽에 걸쳐서 설명하고자 하는 내용이다. 교과서 6 쪽에서 9 쪽에 걸쳐 설명하고 있는 내용은 함수의 극한의 정의이며 이도 수열의 극한과 마찬가지 생각을 하여 탄생하였다. 이제 함수의 극한에 대하여도 위와 같이 풀어서 이해해 보려는 노력이 필요하다. 이 부분은 여러분의 숙제로 남겨둔다.

문제 1.1. 함수의 극한의 예를 3 가지 이상 찾아서 이로부터 함수의 극한의 정의를 위와 비슷한 방법으로 설명하여라.

2. 논리 (LOGIC)

앞절에서 우리는 말을 여러 가지로 바꾸어 보았다. 이 과정에서 바꾸기 전의 말과 바꾼 후의 말의 뜻이 달라지지 않도록 조심하였다. 이것을 쉽게 하려면 소위 논리를 잘 사용하여야 한다. 이 절에서는 수학에서 잘 사용하는 논리를 간단히 정리하였다.

다음은 수리논리 (mathematical logic) 에서 사용하는 기본 공식이다. 이것들이 옳음을 확인하는 것은 논리학의 공리에 근거한 것이며 진리표 (truth table) 을 이용하면 간단하다.(여기서는 다루지 않는다.) 우리에게 필요한 것은 이러한 공식이 의미하는 바를 실제 상황에 적절하게 활용할 수 있도록 하는 것이다.

다음에서는 논리학의 기호를 사용한다: ¬(negation), ∧(and), ∨(or), ∀(for all), ∃(there exists).

규칙. (1) 미리 가정으로 공표하지 않은 사실을 증명에 사용하면 안 된다.

(2) 명제 $H \Rightarrow C$ 를 증명할 때, C 의 부정 $\neg C$ 를 가정하고 진술(statement) H 를 사용하여, 절대로 성립할 수 없는 결론을 이끌어내면 된다. (귀류법)

(3) 진술 $\neg[\neg S]$ 는 진술 S 와 동일하다.(= 동치이다)

(4) 진술 $\neg[H \Rightarrow C]$ 는 진술 $H \wedge [\neg C]$ 와 동일하다.

(5) 진술 $\neg[S \wedge T]$ 는 진술 $[\neg S] \vee [\neg T]$ 와 동일하다.

(6) 진술 $\neg[\forall x\, S(x)]$ 는 진술 $\exists x\, [\neg S(x)]$ 와 동일하다.

(7) 진술 $\neg[\exists x\, S(x)]$ 는 진술 $\forall x\, [\neg S(x)]$ 와 동일하다.

(8) 명제 $P \Rightarrow Q$ 와 명제 P 가 옳으면, 명제 Q 도 옳다.

(9) 다음은 옳은 명제이다.

$$P \Rightarrow [P \vee Q],\ Q \Rightarrow [P \vee Q],\ [P \wedge Q] \Rightarrow P,\ [P \wedge Q] \Rightarrow P,$$

$$[[\neg Q] \Rightarrow [\neg P]] \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q],\ [[P \Rightarrow Q] \wedge [Q \Rightarrow R]] \Rightarrow [P \Rightarrow R]$$

(10) 모든 진술 P 에 대하여, 두 진술 P 와 $\neg P$ 가운데 하나가 옳다.

위의 규칙을 간략하게 음미하여 보자. 규칙 2 는 우리가 잘 알고 사용하고 있는 귀류법(歸謬法, reductio ad absurdum, RAA) 또 는 배리법(背理法) 이라는 증명법이다. 규칙 1, 3, 8, 10 은 너무 당연하다. 규칙 5, 6, 7, 9 는 이미 중학교 때 잘 공부하여 알고 있을 것이다.

이 가운데 규칙 10 은 이분법(二分法, dichotomy) 이라고 하며 우리가 보통 사용하는 논리의 기본 가정 가운데 하나이다. 그래서 우리 논리를 이가(二價) 논리라고도 부른다. 이 가정이 좋지 않다고 회의를 품는 사람들도 있으며, 다가(多價) 논리를 만들어 사용하려는 시도도 일어나고 있다.[2] 규칙 9 의 성질들은 여러 가지 예를 통하여 잘 이해하고 있겠지만, 실제 상황을 가정하고 연습하여볼 필요가 있다. 이 가운데 명제와 그의 대우(對偶;contraposition) 의 동치성을 이야기하는 것이 있다. 이것은 직관적으로 이해하기 어려워하는 학생들이 많다. 이것을 조금 음미해 보기 위하여 다음과 같은 상황을 생각하여 보자.

비가 오면 우산을 쓴다.

이 명제는 두 진술 "비가 온다" 와 "우산을 쓴다" 를 $\Rightarrow$ (implication(내포, 內包) 기호) 로 연결한 것이다. 이 말은 사실 조금은 애매한 구석이 있다. 이 말을 다음과 같이 바꾸어 쓰기로 하자.

(1) (A 는) 비가 오고 있으면 (항상) 우산을 쓰고 있다.

[2] 퍼지 (Fuzzy) 논리도 이러한 노력의 일환으로 생겨났다. 퍼지논리가 무엇인가를 이해하는 것은 쉽지 않아 보인다. 그러나 이 애매한 (!) 말은 유행을 타서 많은 사람들이 집에 퍼지 세탁기를 가지고 있다. 그러나 그 기계가 얼마나 퍼지논리를 잘 이해하고 있는지는 알 수 없다.

이 때 이 말이 항상 옳다면, 즉, 어떤 사람 A 가 비만 오면 우산을 꺼내 쓴다면, A 가 우산을 쓰지 않고 있다는 것은 당연히 비가 오지 않고 있다는 사실을 의미한다. 이 말은 다시 쓰면

(2)	(A 가) 우산을 쓰고 있지 않으면 비가 오지 않고 있다.

이다. 이것이 바로 위쪽의 문장의 대우가 된다. (1) 이 성립하면 (2) 도 성립한다는 것을 직관적으로 알 수 있다.

이제 (2) 가 항상 성립하는 말이라고 하자. 즉 A 가 우산을 쓰지 않고 있을 때 날씨를 보면 항상 비가 안 오고 있더라는 사실을 안다면, 비가 오고 있을 때는 안 봐도 A 가 우산을 쓰고 있을 것이라는 생각이 든다. 즉 (2) 가 성립하면 (1) 이 성립한다.

대우에 대하여 조금이라도 의심스러운 점이 있는 사람은 일상생활에서 마주치는 여러 상황에서 가정과 결론이라는 도식에 해당하는 것을 뽑아보고 이를 설명하는 명제와 그 대우를 놓고 차근차근 음미하는 습관을 들여 보면 좋다. 얼마 지나지 않아서 대우를 자유자재로 사용할 수 있게 될 것이다.

대우와 매우 유사한 것이지만 사람들이 더욱 어려워하는 것이 규칙 4 이다. 규칙 4 는 말로 쓰면 다음과 같다. 어떤 implication($[H \Rightarrow C]$) 의 부정, 즉, "$[H \Rightarrow C]$ 가 아니다" 라는 말은 "H 인데도 불구하고 C 가 아니다" 라는 말이라는 것이다.

이 두 진술이 비슷한 이야기라는 데는 누구나 동의한다. 그러나 똑같지는 않다고 생각하는 사람들도 있다. 예를 들어, "비가 오면 우산을 쓴다." 라는 말을 들으면 사람들은 누구나 이 말에는 "비가 오지 않으면 우산을 쓰지 않지만," 이라는 전제가 있다고 생각한다. 실제로 사람들이 일상적인 말을 사용할 때는 이러한 뉘앙스를 짙게 풍기며 말을 사용한다. 즉, 이들은 $\neg[H \Rightarrow C]$ 의 설명에 H 가 아닌 경우에 대한 언급이 없으면 완벽히 같을 수는 없다고 생각하는 경향이 있다. 즉 앞의 진술 "$[H \Rightarrow C]$ 가 아니다" 라는 말은 H 가 성립하는 경우와 H 가 성립하지 않는 경우 모두에 대하여 무엇인가 말하고 있다고 느끼는 것이다.

그러나 수학에서 사용하는 논리에서는 그렇지 않다. 비록 "비가 오지 않으면 우산을 쓰지 않지만," 이라는 전제가 확실히 누구나 따르는 옳은 전제임에도 불구하고, 명제에 언급되지 않았을 때는 "비가 오지 않을 때 우산을 쓰는지 안 쓰는지는 모르지만," 이라는 전제로 받아들인다는 것이다. 따라서

비가 오면 우산을 쓴다. ($H \Rightarrow C$)

는

비가 오는데 우산을 쓰지 않고 있는 일은 없다. ($\neg[H \wedge [\neg C]]$)

는 사실만을 정확하게 지적하고 있는 것이다. 즉, $H \Rightarrow C$ 는 $\neg[H \wedge [\neg C]]$ 라는 말이 된다.

이러한 논리를 일상적 형태의 언어에 잘 적용하려면 일상적 표현을 논리적인 표현으로 바꿀 줄 알아야 한다.

문제 2.1. 다음 표현을 논리적 기호를 사용하여 나타내어라. 그리고 이 표현의 부정을 적어보아라. 생략된 모든 기호를 써서 뜻이 분명하게 하여라. (1) 사람은 빵 만으로는 살 수 없다. (2) 쥐구멍에도 볕들 날이 있다. (3) 짝수인 소수는 2 뿐이다.

참고도서. Marvin J. Greenberg, Euclidean and non-euclidean geometries, chapter 2.