기하학특강 2007 K21
차원에 대하여

양성덕, 김영욱 강의

高麗大學校 數學科

2007년

차원이란?

도형에서 가장 간단하게 눈에 보이는 개념으로 차원이 있다. 다음 도형들은 몇차원인가?

점 · : 0 차원, 선 —— : 1 차원

면  : 2 차원, 입체  : 3 차원

차원의 성질

차원에 관한 가장 근본적인 성질의 하나로 Brouwer의 정리가 있다.

Theorem

$m \neq n$인 두 자연수 m, n에 대하여 $U \subset \mathbb{R}^m$과 $V \subset \mathbb{R}^n$이 각각의 유클리드 공간에서 열린부분집합이면 U와 V는 위상동형이 될 수 없다.

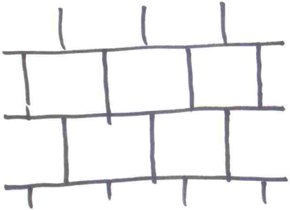
이 내용의 대우는 무엇인가?

차원이란 무엇인가?

1. 벡터공간의 차원: 서로 독립인 방향의 개수
2. 위상공간의 차원: 방향을 정의할 수 없는 경우에도 서로 독립인 방향의 개수를 거의 셀 수 있다: 덮개 차원, Covering Dimension
3. 거리공간의 차원: 거리가 주어져 있는 위상공간의 경우에는 훨씬 더 정밀하게 차원을 잴 수 있다: 하우스도르프 차원

덮개 차원

1. 2차원 평면을 서로 겹치지 않는 정사각형 블록들로 채울 때 3개의 블록이 한 점에서 만나는 그러한 점이 꼭 존재하는가? 4개의 블록이 한 점에서 만나는 그러한 점이 꼭 존재하는가?



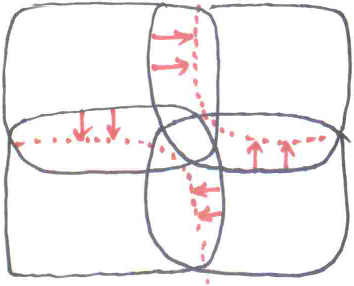
2. 3차원 공간을 서로 겹치지 않는 정육면체 블록들로 채울 때 4개, 또는 5개의 블록이 한 점에서 만나는 그러한 점이 꼭 존재하는가?

덮개 차원의 정의

거리공간 X가 주어져 있고, $S \subset X$는 부분집합이다. S의 임의의 열린덮개(open covering) $\{G_1, \ldots, G_m\}$에 대하여 다음과 같은 열린집합 $H_1, \ldots, H_m$을 찾을 수 있으면 S의 차원은 n보다 크지 않다고 한다.

1. $H_k \subset G_k$이고, $S \subset \bigcup_{k=1}^{m} H_k$이다.
2. $\{H_1, \ldots, H_m\}$ 가운데서 서로 다른 $n+2$ 개의 집합을 임의로 뽑아도 이의 공통부분은 공집합이다.

덮개 차원의 정의



이러한 n 가운데 가장 작은 음이 아닌 정수 n을 S의 덮개차원이라 부른다.

덮개 차원의 성질

1. $A \subset B$ 이면, $\dim A \le \dim B$ 이다.
2. 위상동형인 두 집합의 덮개차원은 같다.
3. $F_1, F_2 \subset S$가 각각 닫힌 부분집합일 때, $S = F_1 \cup F_2$이면,

$$\dim S = \max\{\dim F_1, \dim F_2\}$$

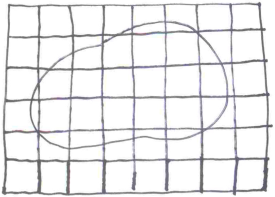
이다. (countable개 까지 성립한다.)

하우스도르프 차원의 아이디어

1. 2차원 평면의 영역을 같은 크기의 정사각형들로 채워넣을 때 (덮을 때), 정사각형의 한 변의 크기를 반$(1/2)$으로 줄이면 정사각형의 개수는 (대략) $4 = 2^2$배로 늘어난다.
2. 직선 (3차원공간)의 한 구간(영역)을 일정한 크기의 구간(정육면체)들로 덮을 때, 덮는 구간(정육면체)들의 (변의)길이를 반으로 줄이면 구간(정육면체)의 개수는 대략 2배$(2^3$배)로 늘어난다.

하우스도르프의 넓이 1

2차원 평면 영역 S의 부피를 재기 위하여 이 영역을 같은 크기의 정사각형들로 덮어보고, 각 정사각형의 넓이와 사용된 정사각형의 개수를 곱하여 본다. 이렇게 얻는 수 가운데 덮는 방법을 바꾸어 보아 가장 작은 수(infimum)로 넓이를 대신하면 좋다.[1]



[1] 비록 infimum을 잡더라도 유한개의 사각형만 사용해서는 모든 집합의 넓이를 알아낼 수 없다. 제대로 하려면 countable개의 사각형을 써야 한다.

하우스도르프의 넓이 2

실제로는 조금 편리하게 다음과 같이 정의한다.

Definition

이 영역을 지름 $d_k < \delta$를 가지는 countable개의 원으로 덮는다. 이 원들의 넓이의 합의 $4/\pi$배는

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$$

이다. 덮는 방법을 달리하며 infimum을 잡은 값의 극한

$$H_2(S) := \lim_{\delta \to 0} H_{2,\delta}(S) = \lim_{\delta \to 0} \inf \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$$

을 이 S의 하우스도르프의 넓이(2차원 부피)라고 부른다.

하우스도르프의 일반화된 부피

하우스도르프의 넓이를 일반화하면 다음과 같은 생각을 할 수 있다.
거리공간의 영역 S의 부피를 재기 위하여 이 영역을 지름 $d_k < \delta$인 countable개의 구로 덮는다. 이 때 다음 값을 생각하자.

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{\alpha}$$

이것은 $\alpha = 2$면 2차원 넓이, $\alpha = 3$이면 3차원 부피를 계산하고 있다고 생각할 수 있다.
이제, 덮는 방법을 달리하며 infimum을 잡은 값의 극한값

$$H_\alpha(S) = \lim_{\delta\to 0} H_{\alpha,\delta}(S) = \lim_{\delta\to 0} \inf \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$$

을 S의 α차원 부피라고 부르기로 한다.

하우스도르프의 차원

당연히 성립하는 사실은 $\alpha \geq 0$을 키워가며 앞의 값 H_α를 계산하여 보면 처음에는 ∞였다가 어느 순간에 0으로 바뀌는 점이 꼭 한 곳이 있다는 것이다.

이 경계가 되는 α를 이 영역 S의 하우스도르프 차원이라고 부른다.

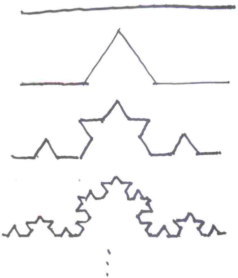
하우스도르프 부피의 성질

1. 유클리드 공간의 점집합 S를 $\lambda > 0$배 하여 얻은 닮은꼴 집합 λS에 대하여 다음이 성립한다:

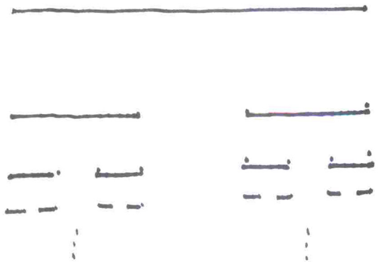
$$H_\alpha(\lambda S) = \lambda^\alpha H_\alpha(S).$$

2. 연속곡선 γ에 대하여 $H_1(\gamma) = l(\gamma)$이다.

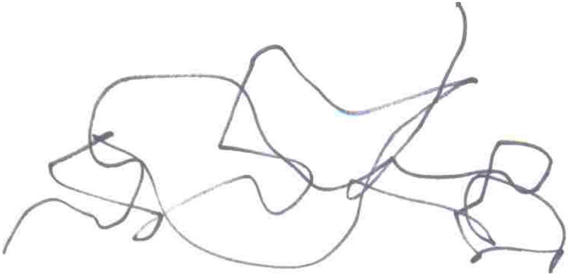
하우스도르프 차원의 예: von Koch의 곡선(눈송이): $\dfrac{\log 4}{\log 3} = 1.2618\cdots$ 차원.



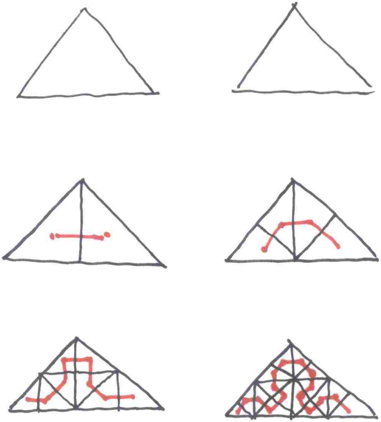
Cantor의 집합: $\dfrac{\log 2}{\log 3}$ 차원



브라운 운동의 궤적: 2 차원



Peano 곡선(space filling curve): 2 차원



삼각형 영역으로 만든 Sierpinski gasket: $\frac{\log 3}{\log 2}$ 차원