

기하학특강 2007 K22

Fractal 차원의 실제

양성덕, 김영욱 강의

高麗大學校 數學科

2007년

차원의 도형의 특징이다.

- ① 선형공간의 차원은 선형적 성질이다. 즉, 선형동형(isomorphic)인 공간에서 basis를 잡으면 그 원소의 개수가 같다.
- ② 덮개 차원은 도형의 위상적 성질이다. 즉, 위상적으로 같은 도형은 덮개 차원이 같다.
- ③ 하우스도르프 차원은 도형의 기하학적 성질이다. 즉, 거리적으로 동형인 도형의 하우스도르프 차원은 같다.

Fractal 차원

앞에서 본 것 처럼 어떤 도형은 자연수가 아닌 수를 차원으로 가지는 것 같다.

이렇게 도형의 (하우스도르프) 차원이 자연수가 아닌 경우 이 도형을 **Fractal 도형**이라고 부른다. 그리고 이 차원은 **Fractal 차원**이라고 부른다.

도형의 복잡도(복잡한 정도)를 Fractal 차원으로 잴 수 있다.

하우스도르프 차원의 활용

자연에 나타나는 현상이 서로 다름을 이야기할 수 있는 도구로 하우스도르프(Fractal) 차원을 사용하면 좋다.

즉, 자연 현상의 Fractal 차원을 계산할 수 있으면 두 현상이 직관적으로 다르다고 이야기하는 것보다, Fractal 차원이 서로 다르므로 다르다고 이야기할 수 있다.

[질문] 주어진 data의 Fractal 차원을 계산할 수 있는가?

Fractal 차원의 근사값 1

규칙적이지 않으면 자연현상의 하우스도르프 차원은 절대로 짤 수가 없다. (왜 그런가?)

규칙적이지 아닌 자연현상의 data를 가지고 이의 하우스도르프 차원을 근사적으로 유추해 볼 수 있다.

어떻게?

Fractal 차원의 근사값 2

주어진 자연현상 S 가 하우스도르프 차원을 가진다면 충분히 작은 $\delta > 0$ 에 대하여 $H_{\alpha,\delta}(S)$ 는 H_α 와 비슷한 값을 가질 것이다.

특히 $H_{\alpha,d}(S)$ 를 계산할 때, 덮개로 사용하는 구의 지름을 모두 같은 크기인 d 로 사용하면 사용되는 구의 개수 $N(d)$ 는 대략 다음 식을 만족시킨다.

$$H_\alpha(S) \approx H_{\alpha,d}(S) \approx N(d) \times d^\alpha$$

우리는 α 도 모르고, α 를 안다고 하여도 이 차원에서 부피인 $H_\alpha(S)$ 를 알 수 없다.

그러면 어떻게 α 를 알아낼 수 있는가?

α 를 알아내는 법

우리가 찾는 것은 α 의 근사값이다. 따라서 서로 다른 d_i 에 대하여 몇 번 개수 $N(d_i)$ 를 세어보면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$H_\alpha(S) = \mu \approx N(d_1) \times d_1^\alpha \approx N(d_2) \times d_2^\alpha \approx \dots$$

이 식을 다시 써 보면

$$\frac{N(d_i)}{\mu} \approx d_i^\alpha$$

여기다 \log 를 붙여 보면

$$\log N(d_i) - \log \mu \approx (\log d_i)\alpha$$

이다. 이제 우리가 작은 d_i 에 대하여 다섯번을 세어 보아 다섯개의 data $N(d_1), \dots, N(d_5)$ 를 얻었다고 하면 우리는 위와 같은 5개의 방정식을 만족시키는 실수 α 를 찾고자 한다.

이러한 over-determined system (방정식의 개수가 미지수의 개수보다 많은 연립방정식)은 수학적인 해를 가지지 않는다. 그러나 가장 잘 맞는 **최적해**(best solution, optimal solution)를 찾을 수 있다.

어떻게?

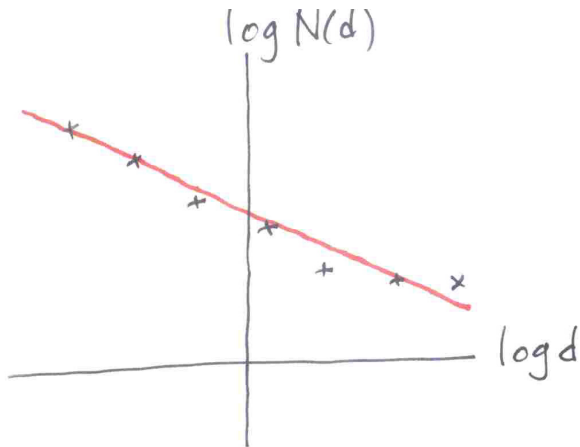
최적해를 찾는 법

이것은 통계학의 대표적 이론이며 일반적으로 회귀분석이라고 하는 방법의 쉬운 경우이다. 우리는 주어진 값에 가장 잘 맞는 1차함수를 찾으려고 한다. 이 1차함수의 변수는 $\log d$ 이고 값은 $\log N(d) - \log \mu$ 이다.

우리의 문제는 $\log \mu$ 를 모른다는 것이지만 장점은 이 1차함수의 기울기 α 만을 원한다는 것이다.

따라서 $\log \mu$ 대신 0 이라고 놓아도 기울기 α 에 변동은 없다.

최적해를 찾는 법



우리가 해 보려고 하는 것

다음과 같은 것을 실제로 해야 한다.

- ① 적절한 자연현상을 하나 정한다: 해안선, 강, 나무, 그 밖에 fractal 현상이 나타나보이는 자연현상.
- ② 자기가 정한 자연현상의 사진 등의 자료를 구한다.
- ③ 자연현상에서 적절한 d_i 를 정하고 이에 해당하는 $N(d_i)$ 를 센다: 적절한 세는 방법을 고안한다. **될 수 있으면 컴퓨터를 활용한다.**
- ④ 얻은 data에서 α 를 유추한다: 직접 행렬을 사용하여 계산하여도 되지만, Mathematica는 좋은 함수를 가지고 있다. **무슨 함수인가?**

다른 예들

꼭 기하학적 예가 아니더라도 적절한 변수 x 에 대하여 이러한 x 가 나타나는 빈도(frequency) f 를 보면, x 의 크기와 $1/f^\alpha$ 가 비례하는 경우를 많이 볼 수 있다.

특히 $\alpha = 1$ 인 경우에 이런 데이터를 $1/f$ Noise라고 하고, 많은 자연현상에서 찾아 볼 수 있다. 예를 들면 우리가 듣는 많은 음악이 $1/f$ Noise이다.