기하학특강 II-k1
테일러의 급수 알아보기 1

양성덕, 김영욱 강의

高麗大學校 數學科

2007년

함수 f가 x_0를 포함하는 한 구간 $I = (x_0 - \epsilon,\ x_0 + \epsilon)$에서 유한한 $n+1$계 도함수를 가지면

$$
\begin{aligned}
f(x) \quad = \quad & f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \\
& \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x)
\end{aligned}
$$

$$
R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)
$$

함수 f가 x_0와 $x_0 + \Delta x$를 포함하는 한 구간에서 유한한 이계 도함수를 갖는다고 하자. 그러면 x_0와 x사이에 있는 적당한 ξ에 대하여

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi)$$

두 함수

$$\begin{aligned} \phi(x) &= f(x_0 + x) - f(x_0) - f'(x_0)x, \\ g(x) &= x^2 \end{aligned}$$

에 대하여, 0과 Δx를 양 끝점으로 갖는 구간에서 Cauchy의 정리를 적용하면,

0과 Δx 사이에 적당한 점 c가 존재하여

$$\frac{\phi'(c)}{2c} = \frac{\phi(\Delta x) - \phi(0)}{g(\Delta x) - g(0)} = \frac{\phi(\Delta x)}{g(\Delta x)}$$

이 된다.

x_0와 $x_0 + c$를 양 끝점으로 갖는 구간에서 ϕ에 대한 평균값의 정리에 의해, 적당한 θ $(0 < \theta_1 < 1)$에 대하여

$$\frac{\phi'(c)}{c} = \frac{f'(x_0 + c) - f'(x_0)}{c} = f''(x_0 + \theta_1 c)$$

$$\phi(\Delta x) = \frac{g(\Delta x)}{2} f''(x_0 + \theta_1 c) = \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_0 + \theta_1 c),$$

따라서

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_0 + \theta_1 c)$$

이 된다.[1]

[1] 이때 θ_1과 $\frac{c}{\Delta x}$이 모두 양수이므로 $\theta = \frac{\theta_1 c}{\Delta x}$ 로 놓으면 $0 < \theta < 1$이고, θ를 위의 식에 대입하면 원하는 결과를 얻는다.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \ (0 < \theta < 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + \quad (|x| < 1)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \quad (|x| < 1)$$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\log(1+t)\right]_{t=\theta x} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

$x = 1$ 에서 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x}$를 멱급수로 전개

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots$$

수렴구간은 $|x - 1| < 1$