기하학특강 II-k12
테일러의 급수 알아보기 2

양성덕, 김영욱 강의

高麗大學校 數學科

2007년

교과서에서 공부한 무한급수는 실제로 변수 x의 다항식 꼴의 무한급수의 수렴 발산을 따지기 위한 도구이다.

$a_n x^n$ 꼴의 항들의 무한합으로 만들어진 급수를 멱급수(power series) 라고 불렀다.[1]

[1] 이 급수는 실제로 강력한 도구이지만, 이 급수가 power series라고 불리는 것은 이 때문은 아니다. 보통 x^n을 x의 n-th power라고 부른다. 이 이름은 여기서 딴 것이다.

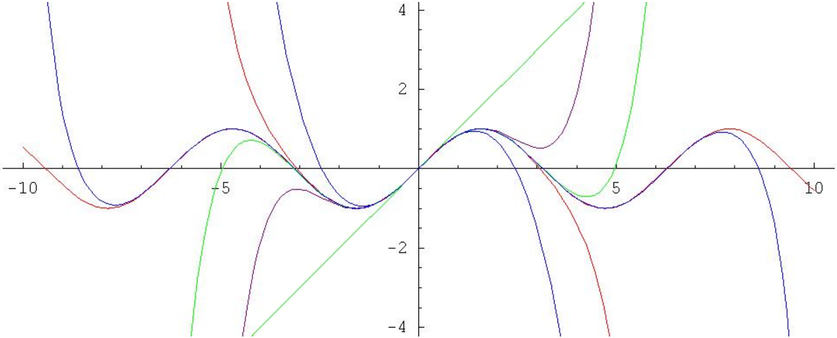
멱급수에서 중요한 것은 이 급수가 어디서 수렴하고 발산하는가이고,

이의 가장 중요한 응용인 Taylor의 급수에서 중요한 것은 어느 지점에서 Taylor의 정리를 사용하는가에 따라서 급수의 모양과 수렴반경이 달라진다는 것이다.

우리는 여기서 한 두가지 함수의 Taylor 급수와 그의 수렴의 모양을 computer 계산을 통하여 직접 보려고 한다.

삼각함수 $\sin x$의 Taylor 전개를 $x = 0$에서 몇 개의 부분합으로 구하여 보고 그 수렴하는 모양을 그려보자.

다음 그림은 $\sin x$의 그래프와 $\sin x$를 $x = 0$에서 전개한 Taylor 전개식에서 상수항부터 각각 제 1차, 3차, 4차, 7차, 9차 및 19차 항까지로 이루어진 다항식의 그래프까지 7개의 그래프를 그린 것이다.


4
2
-2
-4
-10
-5
5
10

어느 그래프가 어느 다항식인지 알아볼 수 있는가?

이를 보면 차수가 올라갈수록 다항식의 그래프는 $\sin x$의 그래프로 다가가며(수렴하면) 그 수렴하는 범위는 점점 넓어짐을 알 수 있다.

교과서에서 계산을 통하여 $\sin x$의 수렴반경은 무한대임을 알 수 있었다.[2]

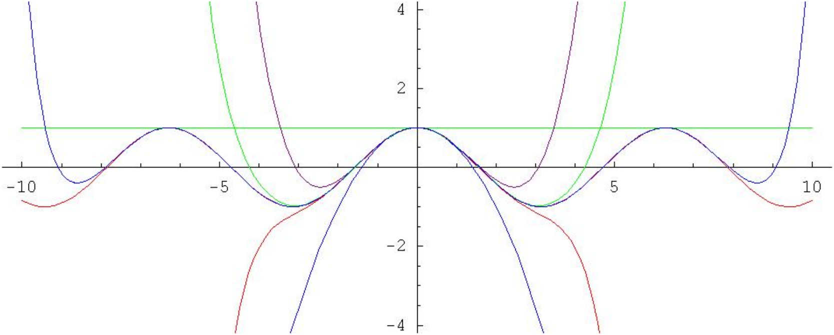
그림에서 이 사실을 알 수는 없지만 그 사실이 어떤 식으로 성립하는지를 볼 수 있다.

[2] 이 사실을 어떻게 알 수 있었는가?

이와 마찬가지로 다음 그림은 $\cos x$의 그래프와 이의 테일러 다항식들의 그래프를 그린 것이다.

$x = 0$에서의 전개식이며, 각각 제 0차, 2차, 4차, 6차, 8차 및 20차항까지의 다항식들이다.

수렴반경을 알아보고 이를 그림에서 확인하여 보자.

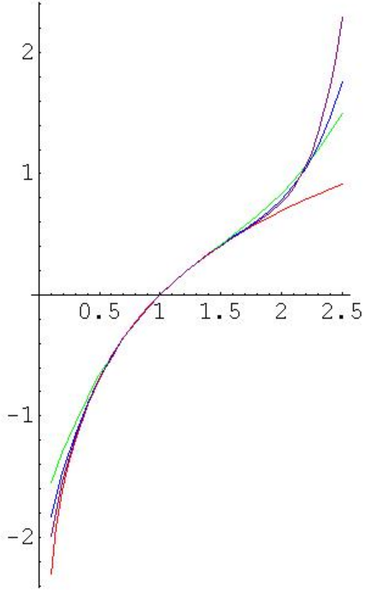

4
2
-2
-4
-10
-5
5
10

로그함수 $\ln x$의 경우의 전개식은 교과서에 나와 있다.

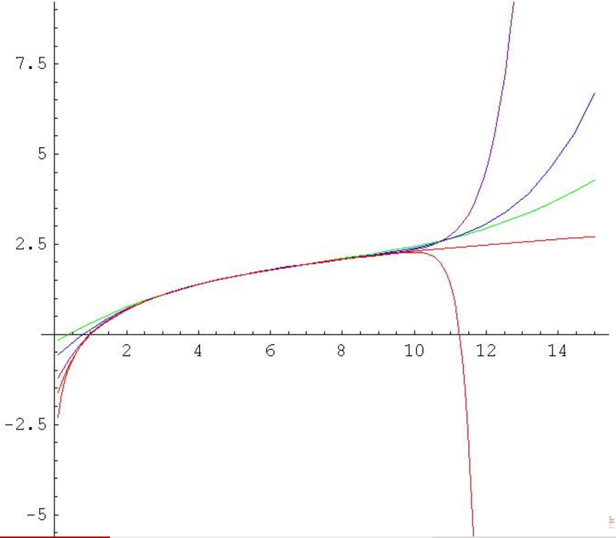
그리고 이 함수를 $x = 1$에서 전개했을 때의 수렴반경은 1이다. 이 말은 $0 < x < 2$에서는 이 급수가 수렴하지만 그 경계의 바깥쪽에서는 발산한다는 말이다.

두 개의 점에서 $\ln x$의 전개를 구해보고 이의 부분합의 그래프를 그려 수렴하는 모양을 직접 보자.

우선 $x = 1$에서의 Taylor다항식의 모양을 보자. 각각 3차, 5차, 7차 다항식이다.


2
1
-1
-2
0.5
1
1.5
2
2.5

이에 비하여 $x = 5$에서 전개한 Taylor 다항식의 그래프들은 다음 그림과 같다.



공부한 방법으로 계산하여 보면 알 수 있지만 이 급수의 경우의 수렴반경은 5이고, 수렴구간은 $(0, 10)$ 이다.

여기서 수림구간에서의 급수의 모양과 그 밖에서의 모양이 어떻게 달라지는지를 알 수 있다.

특히 위의 계산을 보면 같은 구간 $(0, 2)$에서 위의 두 가지 Taylor 전개를 모두 사용하여 값을 구할 수 있음을 알 수 있다.

사실 이 구간에서 사용할 수 있는 전개식은 두 개 정도가 아니라 모든 양의 점에서 전개한 무한히 많은 서로 다른 전개식이 있음을 알 수 있다.

한 함수의 수렴이라도 불연속점을 건너서 다른 구간에서 만든 Taylor 전개식들은 서로 연관성을 갖지 않는다.

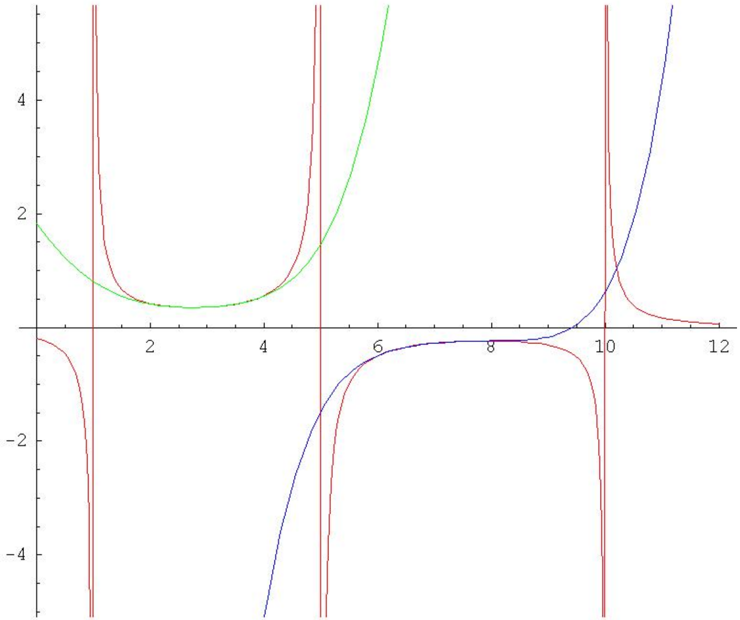
다음 함수

$$f(x) = \frac{10}{(x-1)(x-5)(x-10)}$$

를 $x = 3$에서 전개한 것과 $x = 7$에서 전개한 것은 둘 다 당연히 불연속점 $x = 1, 5, 10$을 건너 양쪽에서 사용할 수 없다. (한 전개식은 $x = 1, 5, 10$으로 나누어진 4개의 구간 가운데 한 구간 안에서만 유효하다.)

실제로 $x = 3$에서의 전개식은 $(1, 5)$에서 유효하며, $x = 7$에서의 전개식은 $(5, 9)$에서 유효할 것이다.

다음 그림은 이것을 나타낸 것이다. 붉은 선이 함수 $f(x)$의 그래프이고 녹색선이 $x = 3$에서의 테일러 다항식, 파란선이 $x = 7$에서의 테일러 다항식이다.


4
2
-2
-4
2
4
6
8
10
12

이 그림들을 보면 Taylor전개를 하는 의미를 알 수 있다. 처음의 삼각함수들에서 부터 각각 주어진 점에서 주어진 차수의 다항식 가운데 주어진 함수에 가장 잘 들어맞는 다항식이란 의미를 가지고 있다.

이 다항식은 전개점에서 함수의 미분계수가 Taylor 다항식의 차수 만큼의 계수(order)까지 다항식의 미분계수와 일치하는 것이다.

따라서 그 계수(order)까지의 미분계수만 놓고 본다면 Taylor의 다항식이 그 함수만큼이나 좋다. 즉 마치 이 다항식을 보고 있다고 생각해도 된다는 말이다. 또 다시 말하면 이만큼 쉽게 생각할 수 있다는 뜻이다.

미분가능한 모든 함수에 대하여 Taylor 정리가 성립한다.

그러나 이것은 나머지항(remainder term)을 끼고 있을 때만 성립한다.(그리고 이것은 한 치의 오차도 없이 정확하게 성립한다.)

그러나 과연 이렇게 만든 Taylor 급수가 수렴하는가도 문제이고, 이 급수가 수렴하는 값이 원래 함수의 값과 일치하는가는 더 문제이다.

우선 Taylor급수가 수렴하는가 안 하는가는 수렴반경의 계산으로 구별할 수 있다.

그러나 이것이 수렴하더라도 함수값으로 수렴하지 않는 경우가 많다. 이것은 나머지항이 얼마나 나쁜가 하는 문제이다.

나머지 항이 매우 나빠서 수렴반경이 0이고 수렴하는 점이 전개점말고는 하나도 없는 그런 미분가능한 함수는 별로 좋지 않다.[3]

이런 함수가 어떤 것이 있는지 적어도 하나는 알아야 한다. (연습 문제를 잘 볼 것.)

[3] 좋지 않은 함수도 얼마든지 쓸모가 있다. 나쁜 것을 잘 알아야 좋은 것도 잘 알 수 있다.

해석함수

좋은 함수는 이름을 가지고 있다.

Taylor 정리에서 좋은 나머지항을 가지고 있고, 따라서 어떤 구간에서 나머지항이 0으로 수렴하여 Taylor급수가 함수값으로 수렴해 주는 그런 함수를 이름하여 해석함수(analytic function)라고 부른다.

이 세상에는 좋은 함수보다 나쁜 함수가 많다.

미분가능한 함수들 가운데서 해석함수는 매우 희귀하여 눈을 감고 미분가능한 함수 가운데서 한 개를 뽑아 해석함수가 될 확률은 0이다.

마찬가지로 해석함수 가운데서 다항함수가 뽑힐 확률도 0이다. 물론 연속함수 가운데서 미분가능한 함수가 뽑힐 확률도 0이다.

이 강의록의 그림과 계산 결과들은 Mathematica를 사용하여 만든 것이다.

이러한 계산을 해 보는 것은 매우 쉽다. (이 파일들은 적당한 곳에서 download 받을 수 있다.)

파일을 전산실에서 직접 실행시켜 계산하고 그려 볼 수 있으며, 이를 조금 바꾸면 많은 함수에 대하여 다시 해 볼 수도 있다.